

Zbigniew Gmyrek
Wydział Informatyki i Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi

MODELOWANIE STATYCZNEJ PĘTLI HISTEREZY MATERIAŁU MAGNETYCZNIE MIĘKKIEGO

Streszczenie – Modelowanie statycznej pętli histerezy materiału magnetycznego jest problemem, którym naukowcy zajmują się od wielu lat. W tym czasie powstało wiele różnych modeli matematycznych, uwzględniających specyfikę budowy materiału magnetycznego. Niektóre z tych modeli mają ograniczony zakres stosowalności, inne zaś pozwalają na modelowanie pętli histerezy podczas dużych zmian wartości maksymalnej indukcji. Artykuł prezentuje opis matematyczny kilku najbardziej popularnych modeli statycznej pętli histerezy materiału magnetycznie miękkiego.

1 Wprowadzenie do modelu Jiles-Athertona

Tworząc matematyczny model Jiles-Athertona autorzy wykorzystali wiedzę dotyczącą procesu magnetyzacji materiału składającego się z domen magnetycznych, zaproponowanego w postaci funkcji Langevina [1]. Używając tej teorii stwierdzono, że energię jaką posiada dipol magnetyczny, posiadający moment magnetyczny m , umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym można przedstawić w postaci

$$E = -\mu_0 m H \cos \beta \quad (1)$$

gdzie:

H – natężenie zewnętrznego pola magnetycznego,

β - kąt pomiędzy wektorem momentu magnetycznego m oraz wektorem natężenia zewnętrznego pola magnetycznego.

Langevin zakładał, że w materiałach paramagnetycznych momenty dipoli nie oddziałują wzajemnie. Używając statystyki Maxwella-Boltzmana, określającej prawdopodobieństwo przyjęcia przez elektron określonego stanu energetycznego, można napisać wyrażenie określające liczbę cząstek magnetycznych (domen) w jednostce

objętości, znajdujących się pomiędzy kątem α oraz $\alpha+d\alpha$ w stosunku do zewnętrznego pola magnetycznego

$$n = 2\pi n_0 e^{(\mu_0 m H \cos \beta) / kT} \sin \beta d\beta \quad (2)$$

gdzie:

n_0 – jest określony stosunkiem liczby wszystkich cząstek obecnych w objętości V , odniesiony do tej objętości V ,

k – jest stałą Boltzmana,

T – jest temperaturą bezwzględną

Tak więc magnetyzacja rozumiana jako suma wektorowa momentów magnetycznych w jednostce objętości, równoległych do wektora zewnętrznego pola magnetycznego, może być opisana zależnością

$$M = \int_0^\pi m \cos \beta dn = \frac{Nm \int_0^\pi e^{(\mu_0 m H \cos \beta) / kT} \cos \beta \sin \beta d\beta}{\int_0^\pi e^{(\mu_0 m H \cos \beta) / kT} \sin \beta d\beta} \quad (3)$$

Wprowadzając zmienne określone jako

$A = \mu_0 m H / kT$, $AA = \cos \beta$, $dAA = -\sin \beta d\beta$ można powyższe równanie zapisać w innej formie

$$M = \frac{Mn \int_1^{-1} AA e^{Ax} d\beta}{\int_{-1}^1 e^{Ax} d\beta} \quad (4)$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy ostateczną postać wzoru określającego magnetyzację paramagnetycznego materiału, w postaci

$$M = Nm \left(\coth A - \frac{1}{A} \right) \quad (5)$$

Funkcja w nawiasie znana jest pod nazwą funkcji Langevina. Ponieważ dla wartości $A=0$ posiada nieciągłość więc w praktyce zapisuje się ją w postaci pierwszego członu szeregu Taylora

$$L(A) = \begin{cases} \coth A - \frac{1}{A} & \text{dla } |A| > A_0 \\ \frac{A}{3} & \text{dla } |A| < A_0 \end{cases} \quad (4)$$

Funkcja Langevina jest wykorzystywana do generacji przebiegu krzywej anhisterezowej, opisujące materiał magnetyczny nie posiadający histerezy.

Rzeczywiste materiały magnetyczne stosowane do budowy maszyn i urządzeń, są materiałami ferromagnetycznymi a nie paramagnetycznymi. Tak więc aby lepiej opisywać zachowanie materiału ferromagnetycznego podczas procesu przemagnesowania, należy uwzględnić wnioski wynikające z teorii Weissa. W tej teorii, w materiałach ferromagnetycznych, sąsiadujące momenty magnetyczne oddziałują na siebie tworząc tzw. pole wymiany [2].

Jeżeli założymy, że wzajemne oddziaływania wszystkich momentów jest identyczne i niezależne od odległości, wtedy pole wymiany można opisać wzorem

$$H_{wym} = \alpha \sum_j m_j = \alpha M \quad (5)$$

Wtedy całkowita wartość magnetyzacji zostanie opisana zależnością

$$H_e = H + \alpha M \quad (6)$$

Uwzględniając powyższe zależności i wstawiając do równania (3) oraz przyjmując $M_s = Nm$, otrzymamy

$$M = M_s \left(\coth \frac{H + \alpha M}{a} - \frac{a}{H + \alpha M} \right) \quad (7)$$

gdzie $a = kT/\mu_0 m$

Uwzględniając fakt występowania w realnym materiale bardziej skomplikowanego zjawiska fizycznego stwierdzono, że cały proces magnetyzacji należy podzielić na dwie części. W pierwszej części uwzględnimy magnetyzację odwracalną, nie wywołującą strat Joule'a, oraz na magnetyzację nieodwracalną, związaną w powstawaniem strat mocy. Tak więc opis matematyczny przyjmie nową formę

$$M = M_{ir} + M_{rev} \quad (8)$$

gdzie M_{ir} jest magnetyzacją nieodwracalną zaś M_{rev} jest magnetyzacją odwracalną.

Pod pojęciem magnetyzacji odwracalnej rozumiemy zjawisko fizyczne polegające na tym, że ściana Blocha powraca do pierwotnego położenia gdy zniknie przyczyna jej przesunięcia (zewnętrzne pole magnetyczne). Magnetyzacja nieodwracalna to zjawisko fizyczne w którym ściana Blocha nie powraca do pierwotnego położenia po zaniku przyczyny przesunięcia. Jest to spowodowane występowaniem lokalnych minimów energetycznych związanych np. z niemetalicznymi wtrąceniami występującymi w rzeczywistej strukturze ferromagnetyka. Tak więc straty energii podczas ruchu ściany Blocha związane są z magnetyzacją nieodwracalną. Gęstość strat energii wynikającą z nieodwracalnego ruchu ściany Blocha można określić wzorem

$$dw = \mu_0 k \delta \frac{dM_{ir}}{dH_e} dH_e \quad (9)$$

gdzie k jest współczynnikiem pinningu będącym miarą gęstości defektów struktury magnetycznej. Parametr δ przyjmuje wartości $+1$, -1 w zależności od znaku pochodnej dH_e/dt .

Wprowadzając pojęcie magnetyzacji anhysterezowej (czyli takiej dla której szerokość pętli histerezy wynosi zero) można napisać równanie energetyczne w postaci

$$\mu_0 \int M_{an}(H) dH = \mu_0 \int M(H) dH + \mu_0 \int k \delta \frac{dM}{dH} dH \quad (10)$$

gdzie M_{an} jest magnetyzacją anhysterezową.

W praktyce przyjmuje się ponadto, że magnetyzacja odwracalna jest pewną częścią różnicy między magnetyzacją anhysterezową a magnetyzacją nieodwracalną, wyrażoną przez wartość współczynnika c . Można wtedy przedstawić kolejną zależność

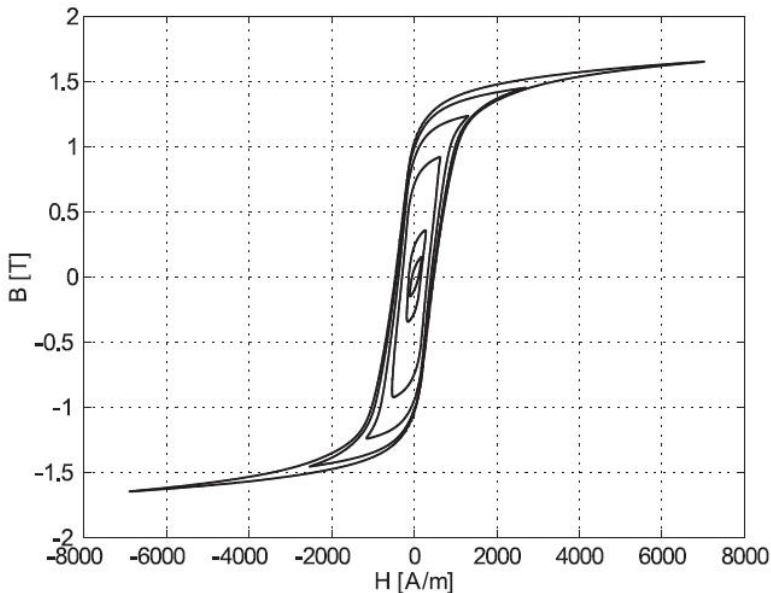
$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{ir}) \quad (11)$$

W efekcie prowadzi to do kolejnej zależności pozwalającej na opisanie magnetyzacji

$$M = (1 - c)M_{ir} + cM_{an} \quad (12)$$

W literaturze spotyka się więc znaną postać matematyczną modelu Jilesa-Athertona zapisaną w postaci różniczkowej [3]

$$\frac{dM}{dH} = (1 - c) \frac{M_{an} - M_{ir}}{k\delta - \alpha(M_{an} - M_{ir})} + c \frac{dM_{an}}{dH} \quad (13)$$



Rys. 1. Statyczne pętle histerezy przykładowego materiału magnetycznego

2 Inne popularne modele matematyczne statycznej pętli histerezy

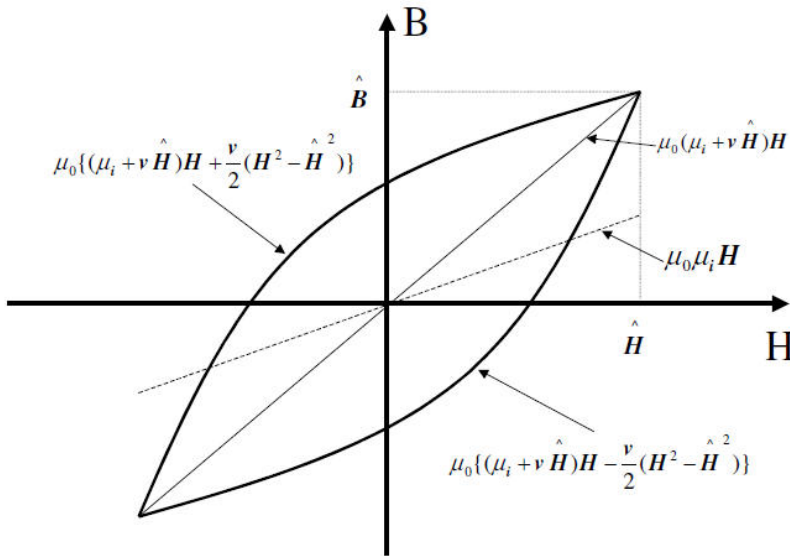
Okazuje się, że w pewnych szczególnych przypadkach nie musimy stosować modelu Jilesa-Athertona aby wyznaczyć statyczną pętlę histerezy. Np. w obszarze niewielkich indukcji doskonale sprawdza się model Rayleigha [5]. Model ten wykorzystuje paraboliczne przybliżenie kształtu pętli histerezy. Obszar zastosowania takiego podejścia jest oczywiście ograniczony do warunków w których można przyjąć, że przenikalność jest sumą przenikalności początkowej oraz składnika proporcjonalnego do zewnętrznego pola wymuszającego.

$$\mu_a = \mu_i + \nu H \quad (14)$$

gdzie μ_a jest amplitudą przenikalności, μ_i jest początkową przenikalnością, v jest współczynnikiem histerezy.

Ostateczna postać równania opisującego statyczną pętlę histerezy można przedstawić w postaci

$$B = \mu_0 \left\{ (\mu_i + vH)H \pm \frac{v}{2}(H^2 - H_{\max}^2) \right\} \quad (15)$$



Rys. 2. Pętla histerezy modelowana opisem Rayleigha

Podobnie uproszczoną formę przyjmuje model Chana-Vladimirescu [6]. W tym przypadku pętla histerezy jest określona przez dwa wyrażenia

$$B_+(H) = B_s \frac{H + H_c}{|H + H_c| + H_c \left(\frac{B_s}{B_r} - 1 \right)}$$

$$B_-(H) = B_s \frac{H - H_c}{|H - H_c| + H_c \left(\frac{B_s}{B_r} - 1 \right)} \quad (16)$$

gdzie B_s jest indukcją nasycenia, H_c jest natężeniem koercji, B_r jest indukcją remenencji.

Nieco zbliżoną formę modelowania do tej jaką prezentuje model Jilesa-Athertona, jest model Hodgsona [7]. Model opisany jest równaniem

$$\frac{bH}{dt} = \alpha \left| \frac{dB}{dt} [f(B) - H] + \frac{dB}{dt} g\left(B, \frac{dB}{dt}\right) \right| \quad (17)$$

gdzie α jest stałym parametrem, f oraz g są funkcjami zależnymi od indukcji oraz jej pochodnej względem czasu. Dzieliąc obie strony równania przez dB/dt otrzymamy bardziej znaną postać równania opisującego ten model

$$\frac{dH}{dB} = \alpha s\left(\frac{dB}{dt}\right) [f(B - H)] + g\left(B, \frac{dB}{dt}\right) \quad (18)$$

gdzie funkcję s definiujemy jako

$$s\left(\frac{dB}{dt}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \frac{dB}{dt} > 0 \\ -1 & \text{dla } \frac{dB}{dt} < 0 \end{cases} \quad (19)$$

gdzie H_{max} jest maksymalną wartością natężenia pola magnetycznego. Funkcje f oraz g mogą być zdefiniowane jako

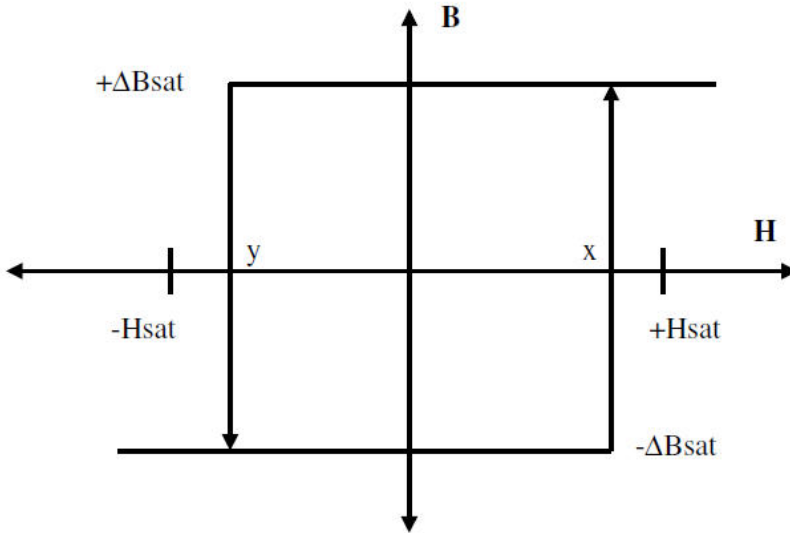
$$f = \begin{cases} D_1(B + B^*) - D_2 B^* & : B < -B^* \\ D_2 B & : |B| \leq B^* \\ D_1(B - B^*) + D_2 B^* & : B > B^* \end{cases} \quad (20)$$

$$g = \begin{cases} (1 + D_3)D_2 & : |B| \leq B^* \\ D_1 & : |B| > B^* \end{cases}$$

gdzie D_1 , D_2 , D_3 oraz B^* są parametrami modelu.

Model Preisacha jest kolejnym modelem ferromagnetyka, znanym i stosowanym od wielu lat. Zakłada on, że materiał magnetyczny zawiera nieskończoną liczbę magnetycznych dipoli opisanych wyidealizowaną pętlą histerezy. Przeskok an pętli histerezy następuje po osiągnięciu

progowych wartości natężenia pola magnetycznego, oznaczonych jako x oraz y .



Rys. 3. Pętla histerezy magnetycznego dipola, stosowana w modelu Preisacha.

Przyjmując fakt indywidualnego zachowania dipoli magnetycznych reagujących na lokalną wartość pola magnetycznego, można wskazać znormalizowaną wartość indukcji, otrzymaną jako całkę obliczoną na płaszczyźnie przekroju, z uwzględnieniem statystycznego charakteru funkcji przeskoku po pętli histerezy.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy = 1 \quad (21)$$

Wartość indukcji w określonym stanie wzbudzenia można opisać zależnością uwzględniającą obecność regionów o określonym kierunku położenia dipoli magnetycznych.

$$B = B_{sat} \iint_{M+} F(x, y) dx dy - B_{sat} \iint_{M-} F(x, y) dx dy \quad (22)$$

Funkcja $F(x, y)$ może zostać użyta, wykorzystując całkę Everetta lub rozkład Gausa.

Literatura

- [1] Jiles D., *Introduction to Magnetism and Magnetic Material*. Chapman and Hall, London, 1991.
- [2] Bozorth R. M., *Ferromagnetism*. D. Van Nostrand Co. Priceton, New Jersey, 1951.
- [3] Jiles D. C., Thielke J. B., Devine M., Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 1, pp. 27–35, January 1992.
- [4] Jiles D. C. Thielke J. B., Theory of ferromagnetic hysteresis: Determination of model parameters from experimental hysteresis loops, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 5, pp. 3928–3930, September 1989
- [5] Rayleigh, Notes on Electricity and Magnetism, III, *Phil. Mag.*, Vol 23, p225, 1887
- [6] Chan J.H., Vladirimescu A., Gao X.C., Libmann P., Valainis J., Nonlinear transformer model for circuit simulation, *IEEE Transactions on Computer Aided Design*, Vol. 10, No 4, April 1991, pp476-482
- [7] Hodgdon M.L., Mathematical Theory and Calculations of magnetic hysteresis curves, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 6, Nov 1988, 3120-3122
- [8] Boley C.D., Hodgdon M.L., Model and Simulations of hysteresis in magnetic cores, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, No. 5, Sep 1989, pp3922-3924
- [9] Hodgdon M.L., Applications of a theory of ferromagnetic hysteresis, *IEEE Transactionson Magnetics*, Vol. 27, No 6, Nov 1991, pp4404-4406
- [10] Everett D.H., A general approach to hysteresis-part 4, *Transactions of the Faraday Society*, Vol. 51, 1955, pp1551-1557

MODELING OF STATIC HYSTERESIS OF SOFT MAGNETIC MATERIAL

Summary – Modeling the static hysteresis of magnetic material is a problem of which scientists are taking care for many years. At that time a lot of different mathematical models appeared, taking into account the specificity of the structure of magnetic material. Some of these models have the reduced scope of the applicability, whereas others let for modeling the hysteresis under wide change of maximum value of the induction. The paper introduces the mathematical description of a few most popular models of the static hysteresis of soft magnetic material.