

**Antoni John, Piotr Orantek**  
Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych  
Mechaniki,  
Politechnika Śląska, Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice

## **ANALIZA INTERWAŁOWA I ROZMYTA KOŚCI BIODROWEJ CZŁOWIEKA**

Streszczenie – Modelowanie numeryczne ludzkiej kości biodrowej jest złożonym procesem, w którym należy wziąć pod uwagę wiele ważnych czynników. Jednym z nich są własności materiału. Obliczenia numeryczne wymagają wprowadzenia parametrów materiałowych, które zależą od wieku, zdrowia, płci, środowiska oraz wielu innych. Aby dobrać prawidłowo parametry materiałowe, należy wziąć pod uwagę różnorodne dane dotyczące pacjentów. Autorzy artykułu założyli wartości przedziałowe wybranych parametrów materiałowych. Zaproponowano interwałową i rozmytą analizę kości biodrowej.

### **1 Wstęp**

Bioinżynieria zajmuje się wieloma ważnymi problemami związanymi z ludzkim ciałem. Kość biodrowa jest jednym z najważniejszych elementów podporowych w obręczy biodrowej, i jest jednocześnie narażona na wiele urazów. Często przed interwencją chirurgiczną należy wyznaczyć rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń kości biodrowej. Jest to szczególnie ważne, gdy wykonuje się zabieg całkowitej alloplastyki stawu biodrowego. Dla bezpieczeństwa pacjenta wyżej wspomniane rozkłady można wyznaczyć jedynie dwoma metodami: testami wykonywanymi na modelu i obliczeniami numerycznymi. Model numeryczny musi być przygotowany przed obliczeniami numerycznymi [1,2,3]. Obliczenia te wymagają znajomości parametrów materiałowych. Z reguły źródłem wiadomości o materiałach jest literatura, jednak często dane te nie nadają się do zastosowania w obliczeniach. Dlatego szuka się wartości parametrów materiałowych na drodze eksperymentalnej [4,5,6]. Wiadomo, że właściwości materiałowe żywej tkanki zależą od wieku, płci, zdrowia, środowiska oraz wielu innych czynników zmieniających się w czasie. Jako, że interesują nas wyniki nie tylko dla jednej osoby, ale dla grupy pacjentów, powinno się zakładać niepewne parametry materiałów. W pracy zaprezentowano

analizę przedziałową i rozmytą. Analiza dotyczy właściwości materiałów. W obliczeniach zastosowano metodę elementów skończonych [7,8,9].

W rozmytym podejściu liczby rozmyte rozpatruje się jako przedziały odpowiadające alfa-przekrojom.

## 2 Podstawy matematyczne arytmetyki przedziałowej i rozmytej

Najważniejsze definicje i założenia dotyczące liczb przedziałowych można znaleźć w literaturze [10]. W nawiązaniu do definicji, przedziałowy skalar złożony jest z pojedynczych przedziałów należących do dziedziny liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$ . Dziedzina przedziałowych skalarów oznaczana jest jako  $\mathbf{IR}$ . Przedziałowy skalar oznaczany jest jako  $\mathbf{x}$ . Rzeczywisty domknięty przedział jest definiowany jako [10]:

$$\mathbf{x} = \{x \mid (x \in \mathbf{R})(\underline{x} \leq x \leq \bar{x})\} \text{ or } \mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \quad (1)$$

gdzie  $\underline{x}$  oraz  $\bar{x}$  są odpowiednio dolną i górną granicą przedziałowego skalaru. Zbiór skalarów oznaczany jest jako  $\langle \mathbf{x} \rangle$  i definiowany następująco:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \bigcup_i x_i \quad (2)$$

Wektor przedziałowy oznaczany jest jako  $\{\mathbf{x}\} \in \mathbf{IR}^n$ . Opisuje on zbiór wszystkich wektorów, których składniki  $x_i$  należą do odpowiadających im skalarnych przedziałów  $\mathbf{x}_i$ :

$$\{\mathbf{x}\} = \{ \{x\} \mid x_i \in \mathbf{x}_i \} \quad (3)$$

Macierz przedziałowa  $[\mathbf{X}] \in \mathbf{IR}^{n \times m}$  opisuje zbiór wszystkich macierzy, których składnik  $x_{ij}$  zawarty jest w odpowiadającym mu przedziałowym skalarze  $\mathbf{x}_{ij}$ :

$$[\mathbf{X}] = \{ [X] \mid x_{ij} \in \mathbf{x}_{ij} \} \quad (4)$$

Zbiór macierzy  $\langle [\mathbf{X}] \rangle$  opisuje zbiór wszystkich macierzy, których każdy składnik  $x_{ij}$  macierzy zawarty jest w odpowiadającym mu zbiorze

skalarów  $\langle x_{ij} \rangle$ :

$$\langle [X_{ij}] \rangle = \{ [X_{ij}] \mid x_{ij} \in \langle x_{ij} \rangle \} \quad (5)$$

Dodatkowo na liczbach przedziałowych zdefiniowana jest arytmetyka przedziałowa:

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}] \quad (6)$$

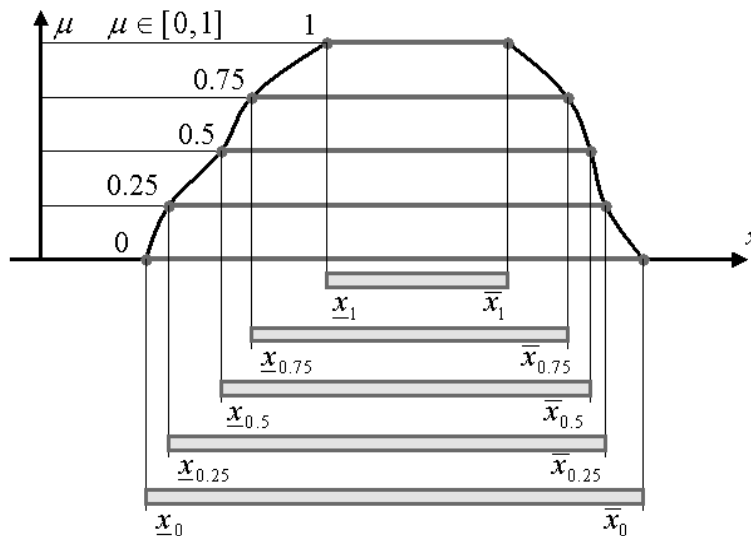
$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}] \quad (7)$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\mathbf{M}), \max(\mathbf{M})] \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{M} = \{ \underline{a} \cdot \underline{b}; \underline{a} \cdot \bar{b}; \bar{a} \cdot \underline{b}; \bar{a} \cdot \bar{b} \}$

$$[\underline{a}, \bar{a}] / [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\mathbf{D}), \max(\mathbf{D})] \quad (9)$$

gdzie:  $\mathbf{D} = \{ \underline{a} / \underline{b}; \underline{a} / \bar{b}; \bar{a} / \underline{b}; \bar{a} / \bar{b} \}$ .



Rys. 1. Liczby rozmyte i odpowiadające im przedziały

Rozpatrzmy analizę elementów skończonych jako funkcję czarnej skrzynki  $f(\{x\})$  zależnej od wektora parametrów  $\{x\}$ , i mającej za wynik wektor  $\{y\}$ . Wektor parametrów wejściowych zawiera się w

wektorze przedziałowym  $\{x\}$ . Procedura przedziałowych elementów skończonych jest równoważna szukaniu rozwiązania postaci:

$$\langle \{y\} \rangle = \left\{ \{y\} \mid (\{x\} \in \{x\}) (\{y\} = f(\{x\})) \right\} \quad (10)$$

Rozważania skupiono na obliczaniu przedziałowego wektora aproksymującego dokładny zbiór rozwiązań. Hiperprzestrzenna aproksymacja opisuje zakres każdego komponentu wektora. Można wyróżnić kilka metod numerycznych w celu obliczenia aproksymacji hipersześciennej dokładnego zbioru rozwiązań. W tej pracy wykorzystano analizę węzłową.

Zbiory rozmyte są rozpatrywane jako para  $\mathbf{x}$  oraz  $\mu(\mathbf{x})$ . Typ zbioru rozmytego to liczba rozmyta. Liczba rozmyta może być reprezentowana przez zbiór alfa-przekrojów (Rys.1). Działania na liczbach rozmytych mogą zostać określone za pomocą arytmetyki przedziałowej dla z każdego alfa-przekrojów.

### 3 Przedziałowa metoda elementów skończonych

Przedziałowa metoda elementów skończonych (IFEM) jest stosunkowo nowym narzędziem obliczeniowym do analizowania problemów niedokładności parametrów. Główne algebraiczne równania po przestrzennej dyskretyzacji mają podobną formę do równań otrzymanych deterministyczną metodą elementów skończonych. Otrzymuje się układ  $n$  równań liniowych:

$$[A][x] = [B] \quad (11)$$

co jest równoznaczne z:

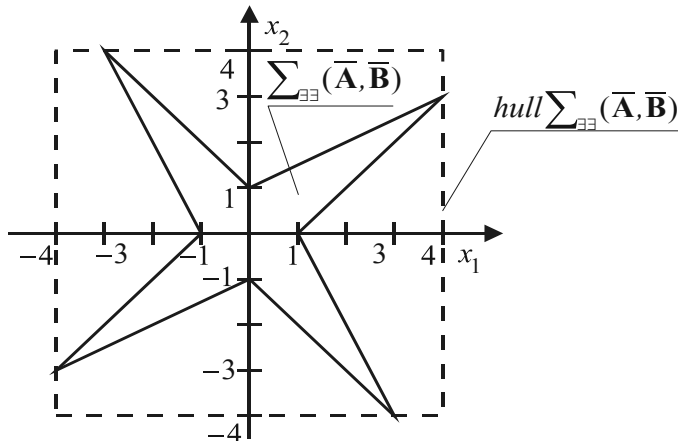
$$\begin{bmatrix} [a_{11}, \bar{a}_{11}] & [a_{12}, \bar{a}_{12}] & [a_{13}, \bar{a}_{13}] & \dots & [a_{1n}, \bar{a}_{1n}] \\ [a_{21}, \bar{a}_{21}] & [a_{22}, \bar{a}_{22}] & [a_{23}, \bar{a}_{23}] & \dots & [a_{2n}, \bar{a}_{2n}] \\ [a_{31}, \bar{a}_{31}] & [a_{32}, \bar{a}_{32}] & [a_{33}, \bar{a}_{33}] & \dots & [a_{3n}, \bar{a}_{3n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}, \bar{a}_{n1}] & [a_{n2}, \bar{a}_{n2}] & [a_{n3}, \bar{a}_{n3}] & \dots & [a_{nn}, \bar{a}_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1, \bar{x}_1] \\ [x_2, \bar{x}_2] \\ [x_3, \bar{x}_3] \\ \dots \\ [x_n, \bar{x}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_1, \bar{b}_1] \\ [b_2, \bar{b}_2] \\ [b_3, \bar{b}_3] \\ \dots \\ [b_n, \bar{b}_n] \end{bmatrix} \quad (12)$$

W przypadku interwałowym elementy macierzy  $[A]$  oraz wektora  $[B]$  są przedziałowe. Dlatego wektor  $[x]$  jest również przedziałowy.

Rozwiązaniem układu przedziałowych równań liniowych jest zbiór *hull* (Rys.2).

Dla przykładu:

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] \\ [2,4] & [1,2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,1] \\ [1,2] \end{bmatrix} \quad (13)$$



Rys. 2. Interpretacja geometryczna rozwiązania układu przedziałowych równań

#### 4 Przedziałowa i rozmyta analiza kości biodrowej

Ludzka kość biodrowa jest utwierdzona w spojeniu łonowym i na powierzchni kontaktu z kością krzyżową. Jest obciążona siłą *F* działającą w sztucznej panewce. Przeprowadzono obliczenia dla dwóch przypadków. W pierwszym przypadku parametry materiałowe nie zależą od położenia. W drugim są zależne od położenia w kości (podział na kość korową i kość gąbczastą).

Tabela. 1. Przemieszczenia w postaci rzeczywistej

punkt	przypadek	x	y	z
P <sub>1</sub>	1	2.927E-07	2.953E-07	-3.016E-07
	2	2.927E-07	2.953E-07	-3.015E-07
P <sub>2</sub>	1	3.932E-07	1.337E-07	-2.920E-07
	2	3.932E-07	1.337E-07	-2.929E-07
P <sub>3</sub>	1	4.194E-07	3.731E-08	-2.663E-07
	2	4.194E-07	3.733E-08	-2.662E-07

W obu przypadkach zastosowano podejścia interwałowe i rozmyte (dwa alfa-przekroje trapezowe). Założono, że dla podejścia przedziałowego moduł Younga kości miedniczej był stały i równy [1.8E8; 2.2E8]. Moduł Younga kości korowej (w pierwszym przypadku) został zamodelowany jako przedział [1.8E10; 2.2E10]. W drugim przypadku moduł Younga kości korowej był równy [1.8E10; 2.2E10] w strefie A (Rys.3) i równy [0.9E10; 1.1E10] na brzegu B (pomiędzy P<sub>1</sub> oraz P<sub>3</sub>). W przestrzeni pomiędzy strefą A i brzegiem B, moduł Younga był wygenerowany jako liniowa funkcja wagi.

W przypadku analizy rozmytej moduł Younga kości miedniczej (w obu przypadkach) był stały i równy liczbom rozmytym (Tab. 3). W pierwszym przypadku moduł Younga kości korowej był zamodelowany jako liczba rozmyta (Tab.3). Wartości modułu Younga kości korowej w strefie A i na brzegu B (Rys.3) w drugim przypadku są przedstawione w Tab.3. W przestrzeni pomiędzy strefą A i brzegiem B, moduł Younga był wygenerowany jako liniowa funkcja wagi.

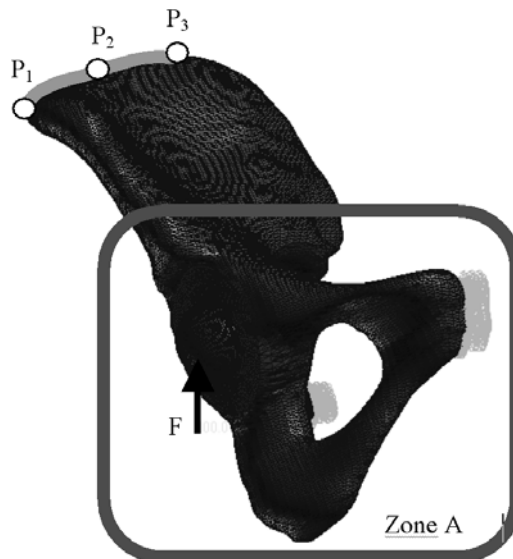
Założono, że pozostałe parametry są liczbami deterministycznymi. Wyniki rzeczywiste, przedziałowe i rozmyte w wybranych punktach są przedstawione w Tab.1 i 2.

Tabela. 2. Przemieszczenia interwałowe wybranych punktów

punkt	przypadek	x		y		z	
		$\underline{x}$	$\bar{x}$	$\underline{y}$	$\bar{y}$	$\underline{z}$	$\bar{z}$
P <sub>1</sub>	1	2.666E-07	3.247E-07	2.690E-07	3.277E-07	-3.347E-07	-2.744E-07
	2	2.665E-07	3.247E-07	2.690E-07	3.276E-07	-3.348E-07	-2.745E-07
P <sub>2</sub>	1	3.580E-07	4.363E-07	1.217E-07	1.484E-07	-3.240E-07	-2.658E-07
	2	3.580E-07	4.362E-07	1.217E-07	1.484E-07	-3.241E-07	-2.658E-07
P <sub>3</sub>	1	3.819E-07	4.654E-07	3.390E-08	4.151E-08	-2.955E-07	-2.424E-07
	2	3.819E-07	4.654E-07	3.388E-08	4.150E-08	-2.955E-07	-2.424E-07

Tabela. 3. Rozmyte wartości parametrów materiałowych I przemieszczenia punktu P<sub>1</sub>

E1 [e+10] k. korowa	E2 [e+8] k. gąbczasta	Px <sub>1</sub> [e-7]	Py <sub>1</sub> [e-7]	Pz <sub>1</sub> [e-7]
1.8 2.2	2.66 3.24	2.66 3.24	2.70 3.27	-3.34 -2.74
1.6 2.4	2.44 3.64	2.44 3.64	2.47 3.68	-3.76 -2.51



Rys. 3. Model kości miednicy człowieka

## 5 Podsumowanie

Analiza przedziałowa umożliwia obliczenia wybranych charakterystyk (odkształcenia, naprężenia i przemieszczenia) nie tylko dla dyskretnych deterministycznych parametrów materiałowych, ale dla założonych przedziałów, dzięki czemu znacznie dokładniej odzwierciedla rzeczywiste warunki. Otrzymane wyniki mogą być pomocne przy ocenie jakości wykonanych chirurgicznych zabiegów. Chirurdzy mogą zaobserwować, które stany są niebezpieczne dla pacjentów. Jest to szczególnie przydatne w przypadkach gdy nie posiadamy dokładnych danych dla danego pacjenta, natomiast mamy wiarygodne dane dla serii innych podobnych przypadków.

## Literatura

- [1] John A.: Numerical analysis of solid and shell models of human pelvic bone. *Lecture Notes in Computer Science* 1988, Eds.: L. Vulkov, J. Waśniewski, P. Yalamov, *Numerical Analysis and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 764-771, 2001.
- [2] John A., Orantek P.: Computer aided creation of geometrical model of human pelvic bone. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, vol. 2, Supplement 2, pp. 217-220, 2001.

- [3] John A., Orantek P.: Computer aided creation of numerical model of human pelvic bone. *Engineering Transactions*, vol. 51, No. 2-3, 215-226, 2003.
- [4] John A., Kuś W., Orantek P.: Material coefficient identification of bone tissues using evolutionary algorithms. in: *Inverse Problems in Engineering Mechanics IV*. Masa.Tanaka (Ed.), Elsevier, 95-102, 2003.
- [5] Burczyński T., John A., Kuś K. Orantek P., Poteralski A.: The evolutionary algorithm and hypersurface in identification of material coefficients in human pelvic bone. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 5, Supplement 1, pp. 61-66, 2003.
- [6] Cowin S.C. (Ed.): *Bone mechanics handbook*. CRC Press, 2001.
- [7] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, Vol. 1: *The Basis*, fifth ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [8] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 139, pp. 3-47, 1996.
- [9] Owen, D.R.J., Feng, Y.T., Mak, K.W. and Honnor, M.E.: Computational modelling of large scale multiple fracturing solids and particulate systems, *Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium, Proceedings of the First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Valliappan, S. and Khalili, N. Eds, Elsevier, Amsterdam, Vol. 1, pp. 117-126, 2001.
- [10] Moore R.E.: *Interval Analysis*, Prentice-Hall, EngleWood Cliffs, N.J., 1966.

## **THE INTERVAL AND FUZZY ANALYSIS OF THE HUMAN PELVIC BONE**

Summary – Numerical modeling of the human pelvic bone is a complex process in which many important factors are taken into account. One of them concerns material properties. Numerical calculations require the characteristics of the material properties and the material parameters from the beginning. The material properties of the living body depend on age, health, gender, environment and many others factors. To determine correct material parameters, health details of a group of patients need to be taken into consideration. In this paper authors assumed interval and fuzzy values of the selected material parameters and proposed interval and fuzzy analysis of the pelvic bone.