

Paulina Obara, Waldemar Szaniec
Katedra Mechaniki Budowli
Politechnika Świętokrzyska

MRS I MES W ANALIZIE BELEK O ZMIENNYM PRZEKROJU

Streszczenie – W pracy rozważaniom został poddany pręt, o stałej szerokości, ale liniowo zmiennej wysokości prostokątnego przekroju poprzecznego. Wyprowadzona została ścisła macierz sztywności liniowej oraz wektor sił wyjściowych pochodzących od obciążenia równomiernie rozłożonego. Przeprowadzona została również analiza przybliżona przy zastosowaniu metody różnic skończonych (MRS) i metody elementów skończonych (MES). Na bazie tych metod powstały programy komputerowe umożliwiające obliczenia w zakresie statyki, dynamiki i stateczności belek o dowolnym profilu podłużnym.

1 Wstęp

Zagadnienia analizy statycznej, stateczności i drgań harmonicznym płaskich zaginanych ustrojów prętowych należą do klasycznych problemów mechaniki konstrukcji. Znane są macierze sztywności liniowej prętów, sztywności geometrycznej oraz konsekwentne macierze mas, na bazie których opracowane są programy metody elementów skończonych (MES). Jednakże wymienione wyżej macierze są wyprowadzane przy założeniu stałych przekrojów poprzecznych w obrębie elementu. Analiza konstrukcji o zmiennym profilu podłużnym jest oczywiście możliwa, wymaga to jednakże dokładniejszej dyskretyzacji konstrukcji, co wiąże się z reguły dodatkowym nakładem pracy. Należy pamiętać również, że otrzymujemy jedynie rozwiązanie przybliżone.

W pracy pokazano, że prostym i efektywnym narzędziem do analizy konstrukcji o zmiennym przekroju, jest metoda różnic skończonych, na bazie, której powstał program komputerowy.

W celu potwierdzenia poprawności modelu MRS, która jest metodą przybliżoną, została wyprowadzona ścisła, w ramach przyjętych założeń, macierz sztywności liniowej dla podstawowego elementu prętowego (pręt obustronnie utwierdzony) uwzględniająca liniową zmianę wysokości przekroju prostokątnego. Wyprowadzony został również wektor sił wyjściowych pochodzących od obciążenia równomiernie rozłożonego dla tego pręta. Otrzymaną macierz sztywności i wektor równoważników

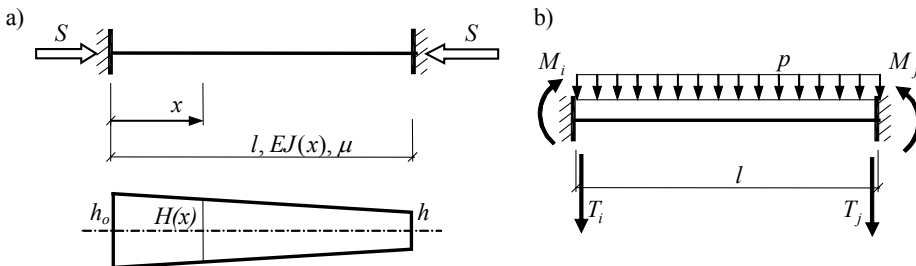
wykorzystano do napisania programu wykonującego obliczenia statyczne belek o zmiennej wysokości elementów z zastosowaniem MES. Przeprowadzone zostały również analizy testowe zginania belek potwierdzające poprawność napisanych programów.

2 Opis pręta

Przedmiotem rozważań są pręty, o stałej szerokości b , ale liniowo zmiennej wysokości prostokątnego przekroju poprzecznego $H(x)$ (rys. 1):

$$J(x) = \frac{bH(x)^3}{12}, \quad H(x) = \frac{h-h_0}{l}x + h_0 \quad (1)$$

Przyjęto następujące charakterystyki prętów: $J(x)$ – zmienny wzdłuż osi moment bezwładności przekroju, $\mu(x)$ – masa równomiernie rozłożona na długości pręta, l – długość pręta, E – moduł Younga, S – siła ściskająca, ω – częstość drgań.



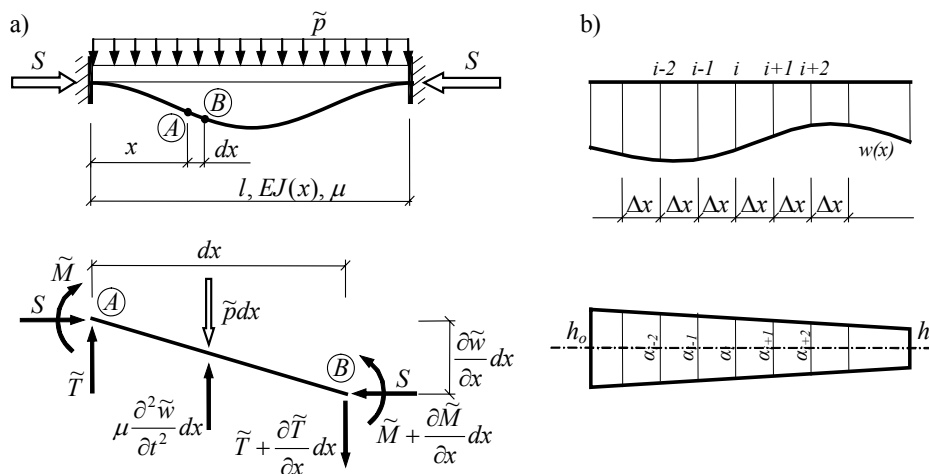
Rys. 1. Pręt obustronnie utwierdzony o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego

3 Analiza ścisła

Układając warunki równowagi różniczkowego elementu osi pręta (rys. 2a) oraz wykorzystując związki fizyczne i geometryczne, tworzy się równania różniczkowe, które po uzupełnieniu odpowiednimi warunkami brzegowymi, przedstawiają sformułowany ściśle, w ramach przyjętych założeń, problem brzegowy.

Rozwiązanie tego problemu prowadzi do uzyskania ścisłej macierzy sztywności.

3.1 Drgania harmoniczne pręta z udziałem sił osiowych



Rys. 2. a) Różniczkowy wycinek pręta ściskanego siłą osiową w konfiguracji aktualnej
b) Podział pręta na skończone przyrosty Δx (MRS)

W przypadku poprzecznych drgań harmonicznych pręta o zmiennym momencie bezwładności z udziałem dużych sił osiowych S , różniczkowe równanie amplitud ma postać:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + S \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \mu(x) \omega^2 w(x) = p(x). \quad (2)$$

Ścisłe rozważania w tym przypadku są praktycznie niemożliwe, gdyż dostajemy różniczkowe równanie o zmiennych współczynnikach $\alpha(\xi)$:

$$\alpha(\xi) w(\xi)^{IV} + 2\alpha(\xi)' w(\xi)^{III} + [\alpha(\xi)'' + \sigma^2] w(\xi)^{II} - \lambda^4 w(\xi) = \frac{pl^4}{EJ} \quad (3)$$

gdzie:

$$\sigma^2 = \frac{Sl^2}{EJ}, \quad \lambda^4 = \frac{\mu(x)\omega^2 l^4}{EJ}, \quad \alpha(\xi) = \frac{J(\xi)}{J}. \quad (4)$$

J – porównawczy moment bezwładności przekroju, ξ – zmienna bezwymiarowa.

3.2 Zginanie pręta

Rozpatrując przypadek zginania statycznego (rys. 1b) różniczkowe równanie osi odkształconej pręta ma postać:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = p(x). \quad (5)$$

Całką ogólną równania (5) jest funkcja

$$w(x) = w_o(x) + w_s(x), \quad (6)$$

gdzie

$$w_o(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{6l^2}{Eb(h-h_o)^2 H(x)} - C_4 \frac{12l^3}{Eb(h-h_o)^3} \left(\frac{h_o}{2H(x)} + \ln[H(x)l] \right) \quad (7)$$

jest całką ogólną równania jednorodnego, natomiast

$$w_s(x) = \frac{6p}{Eb} \iint \frac{x^2}{H(x)^3} dx dx \quad (8)$$

jest całką szczególną równania (5).

Rozwiązując problem brzegowy wyprowadzona została ścisła, w ramach przyjętych założeń, macierz sztywności liniowej dla podstawowego elementu prętowego (pręt obustronnie utwierdzony) uwzględniająca liniową zmianę wysokości (1) przekroju prostokątnego:

$$\underline{K}(J(x)) = \frac{Eb}{12\Delta l^2} \begin{bmatrix} \frac{F_1}{l} & F_2 & -\frac{F_1}{l} & F_3 \\ F_2 & F_4 l & -F_2 & F_5 l \\ -\frac{F_1}{l} & -F_2 & \frac{F_1}{l} & -F_3 \\ F_3 & F_5 l & -F_3 & F_6 l \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie:

$$\Delta = -2(h-h_o) + (h+h_o) \ln \left[\frac{h}{h_o} \right],$$

$$F_1 = (h-h_o)^3 (h+h_o),$$

$$F_2 = (h - ho)^3 ho, \quad F_3 = (h - ho)^3 h,$$

$$F_4 = -ho^2 \left[(h - ho)(3h - ho) - 2h^2 \ln \left[\frac{h}{ho} \right] \right],$$

$$F_5 = -hho \left[h^2 - ho^2 - 2hho \ln \left[\frac{h}{ho} \right] \right],$$

$$F_6 = -h^2 \left[(h - ho)(h - 3ho) + 2ho^2 \ln \left[\frac{h}{ho} \right] \right].$$

Wyprowadzony został również wektor sił wyjściowych pochodzących od obciążenia równomiernie rozłożonego dla tego pręta (rys. 1b):

$$\underline{R}^0 = \{T_i \ M_i \ T_j \ M_j\} \quad (10)$$

gdzie

$$T_i = - \frac{(h - ho)(h + 5ho) - 2ho(2h + ho) \ln \left[\frac{h}{ho} \right]}{2(h - ho)\Delta} pl,$$

$$M_i = \frac{ho \left[-(h - ho)^2 (h - 3ho) + 2h^2 ho \ln^2 \left[\frac{h}{ho} \right] + ho(-3h^2 + 2hho + ho^2) \ln \left[\frac{h}{ho} \right] \right]}{2(h - ho)^3 \Delta} pl^2,$$

$$T_j = \frac{(h - ho)(5h + ho) - 2h(h + 2ho) \ln \left[\frac{h}{ho} \right]}{2(h - ho)\Delta} pl,$$

$$M_j = \frac{h \left[-(h - ho)^2 (3h - ho) - 2hho^2 \ln^2 \left[\frac{h}{ho} \right] + h(h^2 + 2hho - 3ho^2) \ln \left[\frac{h}{ho} \right] \right]}{2(h - ho)^3 \Delta} pl^2.$$

4 Metoda różnic skończonych

Koncepcja MRS polega na zastąpieniu pochodnych występujących w równaniu różniczkowym odpowiednimi ilorazami różnicowymi, tak więc równanie (2) będzie zastąpione równaniem różnicowym

$$\frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \left[EJ(x) \frac{\Delta^2 w(x)}{\Delta x^2} \right]_i + S \left[\frac{\Delta^2 w(x)}{\Delta x^2} \right]_i - \mu_i \omega^2 w(x)_i = p_i(x) \quad (11)$$

zbudowanym w i – tym węźle pręta (rys. 2b). Ilorazy różnicowe powstają na podstawie znajomości różnic skończonych. Przybliżenie jest tym lepsze, im mniejsze przyjmujemy skończone przyrosty Δx .

Określając różnice centralne funkcji ugięcia $w(x)$ (czyli przybliżone ilorazy różnicowe tej funkcji w otoczeniu punktu należącego do jego obszaru określoności) równanie (11) przyjmie postać:

$$\alpha_{i-1} w_{i-2} - (2\alpha_{i-1} + 2\alpha_i - \sigma^2) w_{i-1} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1} - 2\sigma^2 - \lambda_i^4) w_i + \\ - (2\alpha_i + 2\alpha_{i+1} - \sigma^2) w_{i+1} + \alpha_{i+1} w_{i+2} = \frac{p_i \Delta x^4}{EJ} \quad (12)$$

gdzie

$$\sigma^2 = \frac{S \Delta x^2}{EJ}, \quad \lambda_i^4 = \frac{\mu_i \omega^2 \Delta x^4}{EJ}, \quad \alpha_k = \frac{J_k}{J}; \quad k = i-1, i, i+1 \quad (13)$$

Z przypadku ogólnego, który opisuje równanie (12), uwzględniającego drgania harmoniczne pręta zginanego ściskanego siłą osiową, możemy przejść do przypadków szczególnych przyjmując odpowiednio

– $\sigma = 0$ – przypadek drgań własnych

$$\alpha_{i-1} w_{i-2} - (2\alpha_{i-1} + 2\alpha_i - \sigma^2) w_{i-1} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1} - 2\sigma^2) w_i - \\ - (2\alpha_i + 2\alpha_{i+1} - \sigma^2) w_{i+1} + \alpha_{i+1} w_{i+2} = 0 \quad (14)$$

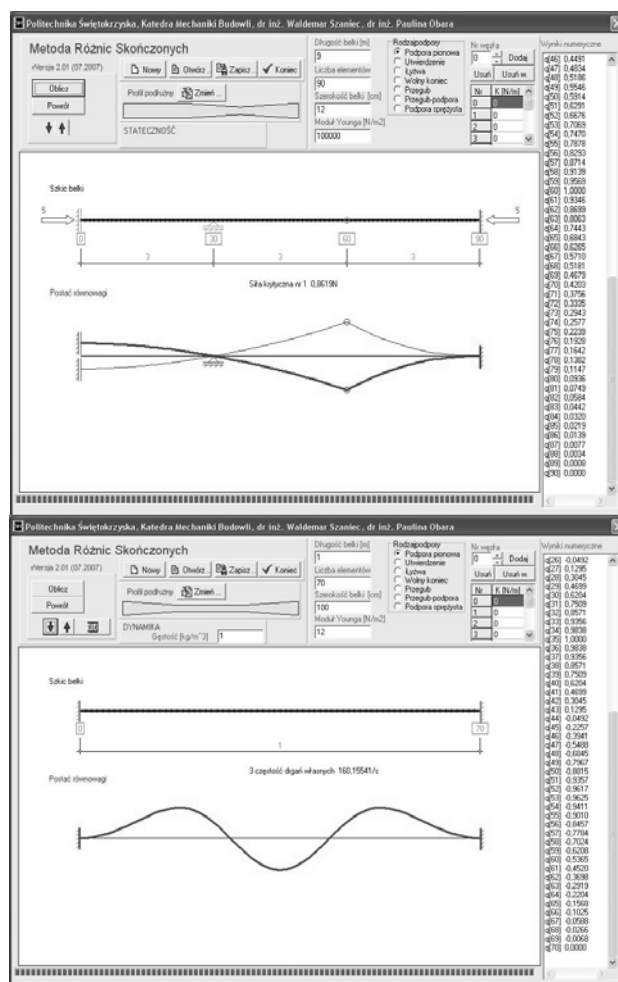
– $\lambda = 0$ – bifurkacja stanu równowagi

$$\alpha_{i-1} w_{i-2} - 2(\alpha_{i-1} + \alpha_i) w_{i-1} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1} - \lambda_i^4) w_i - 2(\alpha_i + \alpha_{i+1}) w_{i+1} + \alpha_{i+1} w_{i+2} = 0 \quad (15)$$

– $\sigma = \lambda = 0$ – zginanie statyczne

$$\alpha_{i-1} w_{i-2} - 2(\alpha_{i-1} + \alpha_i) w_{i-1} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1}) w_i - 2(\alpha_i + \alpha_{i+1}) w_{i+1} + \alpha_{i+1} w_{i+2} = \frac{p_i \Delta x^4}{EJ} \quad (16)$$

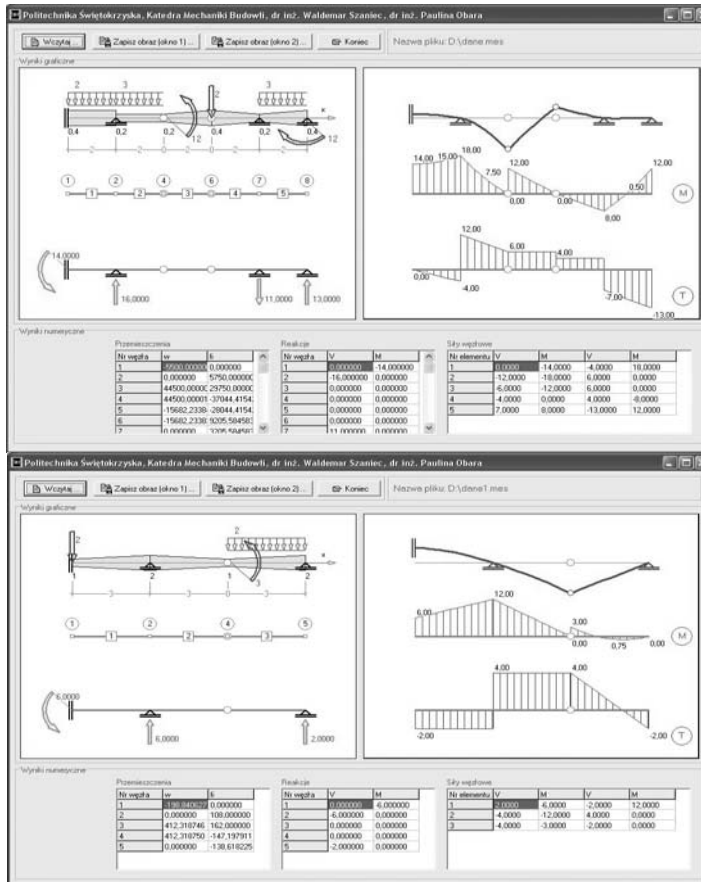
Na bazie MRS powstał program komputerowy, umożliwiający obliczenia w zakresie statyki, dynamiki i stateczności belek o dowolnym profilu podłużnym. Mamy w nim możliwość dowolnego definiowania warunków brzegowych (podpory stałe, podatne) oraz kształtowania prostokątnego przekroju poprzecznego. W chwili obecnej umożliwia obliczenia konstrukcji pod wpływem obciążenia rozłożonego, metoda umożliwia uwzględnienie innych rodzajów obciążenia. Jest prosty w obsłudze, może być wykorzystywany w dydaktyce i badaniach naukowych. Programy tego typu można wykorzystywać w zagadnieniach inżynierskich przy projektowaniu belek o zmiennej wysokości (np. w mostownictwie).



Rys. 3. Plansze z programu MRS

5 Metoda elementów skończonych

Otrzymałą macierz sztywności (9) i wektor równoważników (10) wykorzystano do napisania programu wykonującego obliczenia statyczne belek o zmiennej wysokości z zastosowaniem metody elementów skończonych, przy dowolnych warunkach brzegowych i obciążeniu statycznym.



Rys. 4. Plansze z programu MES

6 Wnioski

Ścisłe rozważania w przypadku stateczności czy dynamiki są praktycznie niemożliwe, gdyż w obu przypadkach, odpowiednio, równanie równowagi pręta ściskanego siłą osiową, czy równanie

amplitud ruchu harmonicznego są różniczkowymi równaniami o zmiennych współczynnikach. Analiza tych zagadnień jest natomiast prosta przy wykorzystaniu MRS. Zaprowadzone testy potwierdziły poprawność kodu numerycznego i zbieżność rozwiązań obydwu metod.

Literatura

- [1] Rakowski G.: Sprężystość – problemy i rozwiązania, metody analityczne i numeryczne. Wyd. PŚk, Kielce 2001.
- [2] Krynicki E., Mazurkiewicz Z.: Ramy z prętów o zmiennych sztywnościach. PWN, Warszawa 1966.
- [3] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.
- [4] Rakowski G. I inni: Mechanika budowli z elementami ujęcia komputerowego. Arkady, Warszawa 1984.

FDM AND FEM IN VARIABLE SECTION BEAM ANALYSIS

Summary – The paper shows that the finite differences method provides a simple and effective tool to analyse constructions with variable sections. A computer program was written on the basis of this method. With this program it possible to make calculations of the statics, dynamics and stability of beams with an arbitrary longitudinal profile. Moreover, boundary conditions (fixed and flexible supports) can be defined and the rectangular cross sections can be shaped in an arbitrary. Presently, the program is used to make analysis of a construction under distributed load, but it will also be able to account for other load type. Programs of this type can be used in engineering problems while designing beams with variable height.