Zbigniew Gmyrek
Wyższa Szkoła Informatyki, Katedra Inżynierskich
Zastosowań Informatyki, 93-008 Łódź, ul Rzgowska 17a
email: gmyrek@wsinf.edu.pl

MODELOWANIE HISTEREZY W MATERIAŁACH MAGNETYCZNYCH

Streszczenie - Artykuł przedstawia przegląd modeli analitycznych pozwalających modelować przebieg pętli histerezy w materiałach magnetycznych. Zajmuje się zarówno modelami statycznej jak i dynamicznej pętli histerezy.

1 Wstęp

Materiały magnetyczne charakteryzują się występowaniem zjawiska zwanego histerezą magnetyczną. Polega ono na tym, że podczas zmniejszania wartości natężenia pola magnetycznego, występującego po uprzednim zwiększaniu jego wartości, osiągane wartości indukcji magnetycznej są inne niż te które występowały podczas zwiększania wartości natężenia pola magnetycznego. Po osiągnięciu zerowej wartości natężenia pola magnetycznego, w materiale magnetycznym występuje indukcja o wartości różnej od zera. Ta wartość nazywana jest indukcją szczątkową. Aby osiągnąć zerową wartość indukcji w próbce, należy przyłożyć zewnętrzne pole magnetyczne skierowane przeciwnie do pola wewnętrznego. Wartość natężenia pola magnetycznego jaką należy wtedy przyłożyć nosi nazwę koercji magnetycznej. Histereza magnetyczna jest reprezentowana przez pętlę histerezy magnetycznej. Jeżeli wyznaczamy ją w warunkach quasi-statycznych nosi ona nazwę statycznej pętli histerezy. Jeżeli zaś wyznaczamy ją dla częstotliwości przemagnesowania większej od kilku Hz to nosi ona nazwę dynamicznej pętli histerezy. Jeżeli wyznaczona pętla histerezy wykazuje zjawisko nasycenia magnetycznego to nazywamy ją wtedy główną pętlą histerezy. Jeżeli zaś nie obserwujemy takiego zjawiska to taką pętlę nazywamy pętlą cząstkową. Modelowanie pętli histerezy to problem znany od wielu lat. Powstało w tym czasie wiele różnych modeli matematycznych, pozwalających badać ten problem. Modele histerezy magnetycznej możemy podzielić w zależności od stopnia ich złożoności. Najbardziej rozbudowane i zawierające najwięcej szczegółowych informacji na temat materiału, to modele wykorzystujące prawa mechaniki kwantowej. Operują one więc na poziomie atomów. Następną grupę modeli stanowią modele wykorzystujące prawa mikroświata. Akceptują one domenową budowę wielu ferromagnetyków. Trzecią grupą są modele wykorzystujące nieliniowe związki pomiędzy obserwowanymi wielkościami fizycznymi. Ponadto wszystkie matematyczne modele histerezy możemy podzielić na dwie grupy: modele statyczne i dynamiczne. W modelach statycznych wielkość wyjściowa (indukcja magnetyczna) zależy wyłącznie od wartości wielkości wejściowej (natężenia pola magnetycznego) oraz od historii magnesowania. W modelach dynamicznych musimy ponadto uwzględniać szybkość zmiany wielkości fizycznych.

2 Statyczne modele histerezy

2.1 Model Rayleigh'a

Jednym z najstarszych modeli histerezy magnetycznej jest model Rayleigh'a. Może on być stosowany podczas pracy w okolicach początkowej części krzywej magnesowania [2]. W tym obszarze przenikalność magnetyczna materiału może być opisana zależnością

$$\mu(H) = \mu_{\text{poczatkowe}} + \eta H \tag{1}$$

gdzie
$\mu_{\text{początkowe}}$ – początkowa przenikalność magnetyczna [H/m],
η – stała Rayleigh'a [H/A],
H – natężenia pola magnetycznego [A/m].

Jeżeli przenikalnośc magnetyczna reprezentuje zbocze pętli histerezy, można ją więc zapisać w postaci

$$\mu(H) = \frac{dB}{dH} \tag{2}$$

Uwzględniając równania (1) i (2) otrzymamy wyrażenie na indukcję magnetyczną

$$B = \int \mu(H)dH = \int (\mu_{poczatkowe} + \eta H)dH = \mu_{poczatkowe} H + \frac{1}{2}\eta H^2 \qquad (3)$$

W wielu modelach histerezy magnetycznej pojawiać się będą terminy: odwracalny i nieodwracalny składnik modelu histerezy – związane są one z mikrostrukturą materiału magnetycznego. W modelu Rayleigh'a składnik $\mu_{poczatkowe}H$ jest składnikiem odwracalnym zaś $1/2\eta H^2$ jest składnikiem nieodwracalnym procesu magnesowania. Pętle histerezy otrzymywane z tego modelu zaliczane są do grupy pętli cząstkowych.

Dla narastającego zbocza pętli histerezy, gdy startujemy z punktu o współrzędnych P_1 ($-H_1$, $-B_1$), możemy napisać równanie na wartość indukcji B dla określonej wartości natężenia pola magnetycznego H

$$B + B_1 = \mu_{poczatkowe}(H + H_1) + \frac{\eta}{2}(H + H_1)^2 \qquad (4)$$

Dla gałęzi opadającej pętli histerezy, statrując z punktu o współrzędnych P_2 (H_1, B_1), możemy napisać

$$B - B_1 = \mu_{poczatkowe}(H - H_1) - \frac{\eta}{2}(H - H_1)^2 \qquad (5)$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń wzorów (1,4-5) otrzymamy końcową postać modelu Rayleigh'a

$$B = (\mu_{poczatkowe} + \eta H_1)H \pm \frac{\eta}{2}(H^2 - H_1^2) \qquad (6)$$

Po wstawieniu do równania (6) wartości H=0, otrzymamy równanie na wartość indukcji szczątkowej B_r

$$B_r = \eta \frac{H_1^2}{2} \qquad (7)$$

2.2 Model Frőlich'a

Jest to jeden w pierwszych empirycznych modeli. Opisany jest równaniem

$$B = \frac{H}{\alpha + \beta|H|} \tag{8}$$

gdzie:
α - parametr modelu [A/Tm],
β – parametr modelu [1/T].

Oprócz tego w modelu wykorzystywana jest nieliniowa zależność B=f(H) zwana krzywą bezhisterezową. Każdej wartości B odpowiada tylko jedna wartość H. Przebieg narastającego i opadającego zbocza pętli histerezy materiału, uzyskujemy przesuwając tę krzywą do punktów H_c oraz $-H_c$ (H_c – wartość natężenia koercji). Wtedy pętla histerezy w modelu Frőlich'a jest opisana równaniem

$$B = \frac{H \pm H_c}{\alpha + \beta|H \pm H_c|} \tag{9}$$

Znak "plus" reprezentuje opadające zbocze pętli zaś znak "minus" narastające zbocze. Parametry modelu mogą być wyznaczone na podstawie indukcji nasycenia oraz indukcji szczątkowej. Wtedy możemy napisać

$$B = \frac{(H \pm H_c)B_s}{|H \pm H_s|} \tag{10}$$

gdzie:
B_s – indukcja nasycenia materiału,
H_s – natężenia pola magnetycznego dla indukcji B_s.

2.3 Model Hodgdon'a

Model ten wykorzystuje równania różniczkowe do opisu przebiegu pętli histerezy magnetycznej [3], w postaci

$$\frac{dB(t)}{dt} = \alpha \left|\frac{dH(t)}{dt}\right| [f(H) - B] + \frac{dH(t)}{dt} g(H) \tag{11}$$

gdzie:

f(H), g(H) – funkcje ciągłe,
α – stała.

Przenikalność dynamiczna wyrażona jest równaniami

- dla narastającego zbocza

$$\frac{dB}{dH}=\alpha\left[f(H)-B\right]+g(H) \tag{12}$$

- dla opadającego zbocza

$$\frac{dB}{dH}=-\alpha\left[f(H)-B\right]+g(H) \quad 13)$$

Dla narastającego zbocza pętli histerezy, startującej z punktu o współrzędnych B_o, H_o możemy napisać

$$B(H)=f(H)+\left[B_o-f(H_o)\right]e^{-\alpha(H-H_o)}+e^{-\alpha H}\int_{H_o}^{H}\left[g(\xi)-f'(\xi)\right]e^{\alpha\xi}d\xi \tag{14}$$

Dla opadającego zbocza, startując z punktu o współrzędnych B_o, H_o możemy napisać

$$B(H)=f(H)+\left[B_o-f(H_o)\right]e^{-\alpha(H_o-H)}+e^{-\alpha H}\int_{H}^{H_o}\left[g(\xi)-f'(\xi)\right]e^{\alpha\xi}d\xi \tag{15}$$

Parametry modelu można wyznaczyć na podstawie znajomości indukcji szczątkowej, natężenia koercji oraz natężenia pola magnetycznego dla indukcji nasycenia.

2.4 Model Stoner-Wohlfarth'a

Jest to model w którym nie występuje zależność od czasu. Model ten zakłąda, że materiał magnetyczny składa się z nieoddziaływujących ze sobą małych cząstek. Zakłada ponadto, brak ścianek domenowych rozgraniczających cząstki, które są jednorodnie namagnesowane do stanu nasycenia. Możliwe jest więc obracanie się domen-cząstek w dowolnym kierunku [1]. Po przyłożeniu zewnętrznego pola magnetycznego, pojedyncza cząstka obraca się pod wpływem momentu magnetycznego. Energia takiej cząstki może być opisana równaniem

$$w = k_{anizotropii} \sin^2 \vartheta - \mu_o H M_s \cos(\vartheta_o - \vartheta) \tag{16}$$

gdzie:
$k_{anizotropii}$ – stała anizotropii materiału na jednostkę objętości,
M_s – magnetyzacja nasycenia cząstki,
μ_o – przenikalnośc magnetyczna próżni,
υ – kąt pomiędzy kierunkiem wektora magnetyzacji cząstki i kierunkiem osi łatwego magnesowania,
υ_o – kąt pomiędzy kierunkiem wektora zewnętrznego pola magnetycznego i i kierunkiem osi łatwego magnesowania.

Cząstka ustawi się w takim kierunku w którym zmiana energii względem kąta υ wyniesie 0, czyli

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0 \tag{17}$$

Tak więc kąt ustawienia cząstki υ może być obliczony ze wzoru

$$2 k_{anizotropii} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mu_o H M_s \sin(\vartheta_o - \vartheta) = 0 \tag{18}$$

Dobierając różne wartości kąta υ_o można otrzymywać pętle histerezy o różnym kształcie. Dla kąta υ_o = 0 otrzymamy pętlę histerezy w kształcie prostokąta, zaś dla kąta υ_o = 90 materiał nie ma histerezy.

2.5 Model Jiles-Atherton'a

Model Jiles-Atherton'a uwzględnia występowanie w materiale magnetycznym niemagnetycznych wtrąceń, uskoków granic kryształów, defektów itp. [4]. Elementy te powodują skokowy a nie płynny ruch ściany domenowej. Model ten opisuje proces magnesowania wykorzystując bilans energii materiału w jednostce objętości, co można zapisać w postaci

$$w_{dostarczona} = w_{magnetostatyczna} + w_{histerezy} \tag{19}$$

gdzie:
$w_{dostarczona}$ – zmiana dostarczonej energii,
$w_{magnetostatyczna}$ – zmiana energii magnetostatycznej,
$w_{histerezy}$ – zmiana energii związana ze stratami histerezowymi.

Zaś magnetyzacja materiału zawiera dwa składniki: odwracalną i nieodwracalną. Magnetyzacja odwracalna to wyginanie się ścian domenowych oraz obrót domen. Magnetyzacja nieodwracalna jest związana z nieodwraclanym przemieszczaniam ścian domenowych. Tak więc bilans energii można opisać równaniem

$$\mu_o \int M_{an}(H)dH = \mu_o \int MdH + \mu_o \int k\delta \frac{dM}{dH} dH \tag{20}$$

gdzie:
M_{an} – magnetyzacja dla przypadku braku histerezy magnetycznej,
k – współczynnik opisujący efekt typu pinning,
δ – znak operacji: “plus” dla zbocza narastającego, “minus” dla zbocza opadającego.

Ponieważ domeny wzajemnie na siebie oddziałują wprowadza się w modelu pojęcia natężenia pola efektywnego opisanego zależnością

$$H_e = H + \alpha M \tag{21}$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń można napisać równanie tego modelu

$$\frac{dM}{dH} = (1-c)\frac{M_{an}(H_e) - M_{irr}}{k\delta - \alpha(M_{an}(H_e) - M_{irr})} + c\frac{dM_{an}(H_e)}{dH} \tag{22}$$

$$M_{an}(H_e) = M_s\left(\coth\frac{H_e}{a} - \frac{a}{H_e}\right) = M_s\left(\coth\frac{H+\alpha M}{a} - \frac{a}{H+\alpha M}\right) \tag{23}$$

gdzie:
a,k,α,c – parametry określane na podstawie eksperymentu.

2.6 Model Preisach'a

Model ten wykorzystuje parametry materiałowe, związane bezpośrednio z mikrostrukturą materiału, do opisu makroskopowego zachowania materiału magnetycznego [5]. Klasyczny model jest reprezentowany przez nieskończoną sumę prostych pętli histerezy (w postaci prostokąta) i jest opisany równaniem

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \varpi(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta}\, u(t) d\alpha\, d\beta \tag{24}$$

gdzie:
$f(t)$ – funkacja określająca zachowanie materiału,
$\gamma_{\alpha\beta}$ – operator przełącznikowy przyjmujący wartości +1 i –1,
α, β – wartości przełączające położenie na pętli histerezy (w postaci prostokąta),
$u(t)$ – wymuszenie,
ϖ - funkcja Preisach'a, wyznaczona dla różnych par wartości α i β.

Funkcja Preisach'a może być wyznaczona na drodze eksperymentalnej.

3 Dynamiczne modele histerezy

3.1 Model Hodgdon'a

Model ten uwzględnia dynamikę zjawisk. Jego opis można uzyskać po wprowadzeniu poprawek do równań opisujących statyczny model Hodgdon'a. Tak więc dynamiczny model opisany jest równaniem

$$\frac{dB(t)}{dt} = \alpha \left| \frac{dH(t)}{dt} \right| \left[f(H) - B \right] + \frac{dH(t)}{dt} gg\left(H, \frac{dH(t)}{dt} \right) \tag{25}$$

gdzie:
$gg(H, dH/dt)$ – funkcja uwzględniająca dynamikę zjawisk.

Funkcję tę można opisać zależnością

$$gg\left(H, \frac{dH(t)}{dt}\right) = \left(1 + c\left(\frac{dH}{dt}\right)a_3\right)a_1 \tag{26}$$

gdzie:
a_1, a_3 – współczynniki zależne od indukcji szczątkowej, natężenia koercji oraz natężenia pola magnetycznego dla stanu nasycenia.

3.2 Model Chua

Model ten bazuje na fenomenologicznym opisie zjawiska zachowania ferromagnetyka [6]. Opis matematyczny zachowania modelu jest w postaci

$$\frac{dy}{dt} = g(x(t) - f(y(t))) \tag{27}$$

gdzie:
x(t) – wielkość wejściowa reprezentująca natężenie pola magnetycznego H(t),
y(t) – zmienna wyjściowa reprrezentująca indukcję B(t),
g,f – funkcje monotoniczne i różniczkowalne.

Dla symetrycznych pętli histerezy funkcje f i g są nieparzyste.

3.3 Dynamiczny model Preisach'a

Model ten jest uogólnieniem statycznego modelu Preisach'a. Uwzględnia dynamikę zachodzącego zjawiska i jest opisany równaniem

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \varpi\left(\alpha, \beta, \frac{df}{dt}\right)\gamma_{\alpha\beta}\, u(t)\, d\alpha\, d\beta \tag{28}$$

W tym modelu funkcja Preisach'a musi być wyznaczona dla różnych częstotliwości.

4 Podsumowanie

W literaturze opisanych jest wiele modeli matematycznych, umożliwiających modelowanie przebiegu pętli histerezy. Dokładne wyznaczenie przebiegu pętli w warunkach dynamicznych jest o tyle istotne ponieważ pole pętli histerezy jest miarą strat mocy występujących w materiale podczas przemagnesowania. Na uwagę zasługują więc modele dynamiczne – w szczególności dynamiczny model Preisach'a. Niestety wymaga on wcześniejszego eksperymentalnego wyznaczenia funkcji gęstości Preisach'a, najlepiej w podobnym warunkach pracy.

Literatura

[1] E. Della Torre, Magnetic hysteresis, IEEE Press, 1999.

[2] A. Ivanyi, Hystesis models in electromagnetic computation, Departament of Electromagnetic Theory, Technical University of Budapest, 1997.

[3] M. L. Hodgdon, Methematical theory and calculations of magnetic hysteresis curves, IEEE Transaction on Magnetics, 1988.

[4] D. C. Jiles, D. L. Atherton, Theory of ferromagnetic hysteresis, Journal of Magnetics and Magnetic Materials, 1986.

[5] F. Liorzou, B. Phelps, D. L. Atherton, Macroscopic models of magnetic hysteresis, IEEE Transactions on Magnetics, 2000.

[6] Y. Saito, K. Fukushima, S. Hayano, N. Tsuya, Application of a Chua type model to the loss and skin effect calculation, IEEE transaction on Magnetics, 1987.

MODELLING OF HYSTERESIS IN MAGNETIC MATERIALS

Summary - Tha paper introduces review of analytical models permitting to model the course of the hysteresis loop in magnetic materials. It deals with both static as well dynamic models.