Andrzej Borys
Wydział Telekomunikacji i Elektrotechniki, Akademia Techniczno–Rolnicza
im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy
85-796 Bydgoszcz, ul. Al. Prof. S. Kaliskiego 7
borys@atr.bydgoszcz.pl

WYJAŚNIENIE PROBLEMÓW I TEORETYCZNYCH NIEJASNOŚCI WYSTĘPUJĄCYCH W METODZIE ANALIZY NIELINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH PRZY POMOCY SZEREGU VOLTERRY

Streszczenie - Przedstawiona praca jest poświęcona wyjaśnieniu pewnych problemów i teoretycznych niejasności, jakie występują w literaturze i opiniach dotyczących analizy nieliniowych układów elektronicznych przy pomocy szeregu Volterry. W tym artykule pokazano, między innymi, że modele podstawowych elementów nieliniowych wyprowadzone w dziedzinie częstotliwości dla analizy nieliniowej za pomocą zmodyfikowanej macierzy admitancyjnej są identyczne z modelami, jakie wyprowadza się przy wykorzystaniu metody z tzw. sygnałem próbnym (tj. metody, w której wyprowadzenia są dokonywane w dziedzinie czasu). Ponadto pokazano tutaj, że wzory i równania, które uzyskuje się przy zastosowaniu metody pobudzenia wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca i prowadzenia wyprowadzeń konsekwentnie w dziedzinie częstotliwości, otrzymuje się w identycznej postaci przy zastosowaniu metody z tzw. sygnałem próbnym. Powyższe podejście, polegające na pobudzeniu wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca prowadzi w wyprowadzeniach do pojawienia się iloczynów impulsów Diraca. Podejście to jest jednak poprawne: ma ono bardzo silne uzasadnienie matematyczne. W tak poważnych pracach jak [10], [16], [22] pokazano, że można używać iloczynów impulsów Diraca. Wykazano, że ww. podejście nie prowadzi do fałszywych wzorów na transmitancje nieliniowe układów (można je uzyskać alternatywnie, np. za pomocą metody z sygnałem próbnym).

1 Wprowadzenie

Na temat analizy nieliniowych układów elektronicznych przy pomocy szeregu Volterry napisano wiele artykułów, istnieją również opracowania monograficzne. W artykułach tych i monografiach omówiono różnorodne zagadnienia, ale, jak się okazuje, nie zawsze w sposób przystępny. Przyczyniło się to do powstania i rozpowszechnienia wielu nieporozumień dotyczących problemów związanych ze stosowaniem szeregu Volterry.

Jednym z celów tej pracy, ale nie głównym, jest przedstawienie i uporządkowanie wielu podniesionych wątpliwości i niejasności terminologicznych. W przedstawionych tutaj wyjaśnieniach oparto się na źródłowej literaturze jako podstawie do ustalenia prawidłowych terminów i określeń, z jakich korzysta się w analizie układów nieliniowych za pomocą szeregu Volterry.

Głównym celem tej pracy jest przedstawienie oryginalnych przyczynków autora do teorii szeregu Volterry wykorzystywanego w dziedzinie częstotliwości; przyczynki te nie były nigdzie do tej pory publikowane. Jest też faktem, że praca ta powstała z myślą o uzupełnienie poprzedniej pracy autora [9], dotyczącej tematyki częstotliwościowego podejścia do zastosowań szeregu Volterry w analizie nieliniowych układów elektronicznych. W wyniku powstał materiał przedstawiony w rozdziałach 2-5, w którym pokazano po raz pierwszy, że:

1. modele podstawowych elementów nieliniowych wyprowadzone w dziedzinie częstotliwości w pracy [5] dla analizy nieliniowej za pomocą zmodyfikowanej macierzy admitancyjnej (ZMA) [9] są identyczne z modelami, jakie można wyprowadzić przy wykorzystaniu metody posiłkującej się sygnałem próbnym [12], [13] (tj. metody, w której wyprowadzenia są dokonywane w dziedzinie czasu),

2. wszystkie wzory i równania wyprowadzone w pracy [9] przy zastosowaniu metody pobudzenia wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca i prowadzenia wyprowadzeń konsekwentnie w dziedzinie częstotliwości uzyskuje się w identycznej postaci przy zastosowaniu metody z tzw. sygnałem próbnym [12], [13],

3. podejście zastosowane w pracy [9], polegające na pobudzeniu wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca i prowadzące do pojawienia się iloczynów impulsów Diraca w wyprowadzanych wzorach, jest poprawne. Podejście to ma bardzo silne uzasadnienie matematyczne: w tak poważnych pracach jak [10], [16], [22] pokazano, że można używać iloczynów impulsów Diraca. W tym artykule pokazano, że powyższe podejście nie prowadzi do fałszywych wzorów na transmitancje nieliniowe układów (można je uzyskać alternatywnie, np. za pomocą metody z tzw. sygnałem próbnym).

Przedstawione powyżej przyczynki stanowią uzasadnienie teoretyczne dla częstotliwościowej metody wykorzystania szeregu Volterry w analizie nieliniowych układów elektronicznych.

2 Wyjaśnienia natury ogólnej

Często słyszy się stwierdzenie, że metoda szeregów Volterry w zastosowaniach jest metodą analizy przybliżonej. Stwierdzenie to jest oczywiście nieścisłe, gdyż, przykładowo, dokładnie to samo można powiedzieć o metodzie analizy liniowej, tj. że jest ona w zastosowaniach przybliżona.

Zauważmy również, w związku z powyższym, że istnieją nieliniowe układy, mniej lub bardziej złożone, które posiadają dokładny opis za pomocą szeregu Volterry (takim układem jest, np. układ, w którego skład wchodzi układ liniowy z dołączoną nieliniową przewodnością $i = av^3$). Poza tym wiadomo [11], że odpowiedzi układów i systemów posiadających właściwość tzw. zanikającej pamięci (a w praktyce jest dużo takich układów i systemów) mogą być aproksymowane z dowolną dokładnością za pomocą szeregów Volterry. To znaczy w tych przypadkach, że szereg Volterry o nieskończonej liczbie wyrazów przedstawia sobą dokładny opis układu (systemu).

Wyrażana jest też często opinia, że metodę analizy układów nieliniowych przy użyciu szeregów Volterry stosuje się do układów o określonym wejściu i wyjściu, a więc w sensie sformułowanym przez Wienera [28], a zastosowanie metody szeregów Volterry do analizy sieciowej, określania wielkości gałęziowych, kiedy nie jest określone, co jest wejściem, a co jest wyjściem [9] – to jest coś innego. Przede wszystkim błędne w tym stwierdzeniu jest to, że metoda sieciowa z wykorzystaniem szeregów Volterry to jest taka metoda, w której nie jest określone wejście (lub wektor wielkości wejściowych). Obojętnie czy mamy do czynienia z metodą sieciową, czy też nie, wejście (lub wektor wielkości wejściowych) w jakiejkolwiek metodzie wykorzystującej szereg Volterry jest zawsze określony. Co najwyżej sygnał wejściowy nie jest przez niektórych autorów pokazywany explicite we wzorach (głównie w celu uproszczenia zapisu).

Gwoli ścisłości terminologicznej należy też powiedzieć, że w literaturze nie używa się sformułowania mówiącego, że szereg Volterry o określonym wejściu i wyjściu to szereg w sensie sformułowanym przez Wienera. Według Martina Schetzena [26], jednego ze znakomitych uczniów Norberta Wienera, jak również Irwina Sandberga [25], szeregów, o których mowa powyżej, używał w swoich pracach już Volterra, natomiast Wiener był tym, który po raz pierwszy zastosował je w analizie systemów nieliniowych. Z imieniem Wienera ściśle związany jest tzw. szereg ortogonalny, wyprowadzany z szeregu Volterry (szczegóły można znaleźć w przeglądowej pracy Schetzena [27]).

Czasem niepoprawnie interpretowany jest sposób przechodzenia od jednowymiarowego czasu do czasu wielowymiarowego. (Operacja przechodzenia od czasu jednowymiarowego do czasu wielowymiarowego i odwrotnie jest zabiegiem stosowanym w teorii i zastosowaniach szeregu Volterry w celu uproszczenia wielu wyprowadzeń i uzyskania użytecznych wzorów [12].) W celu bliższego przyjrzenia się źródłu nieporozumień w tym przypadku, załóżmy, że prąd i napięcie na jakimś elemencie nieliniowym układu można wyrazić za pomocą następujących szeregów Volterry:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} i^{(k)}(t) \tag{1a}$$

oraz

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(t), \tag{1b}$$

gdzie $i^{(k)}(t)$ i $v^{(k)}(t)$ oznaczają składniki rzędu *k*, odpowiednio, prądu i napięcia. Składniki te wyrażają się explicite poprzez zależności

$$y^{(k)}(t) = y^{(k)}(t_1,...,t_k)\Big|_{t_1 = ... = t_k = t}, \tag{2a}$$

gdzie

$$y^{(k)}(t_1,...,t_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{k \text{ razy}} h^{(k)}(\tau_1,...,\tau_k) \prod_{i=1}^{k} x(t_i - \tau_i) d\tau_i \ . \tag{2b}$$

$y^{(k)}(t)$ we wzorze (2a) oznacza $i^{(k)}(t)$ lub $v^{(k)}(t)$. Natomiast $x(t)$ we wzorze (2b) jest sygnałem przyłożonym do wejścia układu, którego jednym z elementów składowych jest rozpatrywany element nieliniowy. $h^{(k)}(\tau_1,...,\tau_k)$ reprezentuje nieliniową odpowiedź impulsową rzędu *k* dla relacji pomiędzy sygnałem wejściowym i prądem lub napięciem na rozpatrywanym elemencie nieliniowym.

Wzór (2b) można zapisać w następującej, skróconej postaci:

$$y^{(k)} = h^{(k)} * x^k, \tag{2c}$$

gdzie $*$ jest symbolem całki splotowej, a k jest rzędem (wymiarem) tej całki.

To, że operacja odwrotna do operacji zapisanej wzorami (2a) i (2b), tj. operacji: podstawienie $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = t$ implikuje $y^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = y^{(k)}(t)$, jest jednoznaczna, wynika właśnie z równań (2a) i (2b). To znaczy, jeżeli weźmiemy przykładowo pod uwagę $v^{(3)}(t)$, to wyraża się ono, zgodnie z powyższymi wzorami, za pomocą następującego wzoru

$$v^{(3)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, x(t-\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (3)$$

Zgodnie z przepisem wyrażonym za pomocą wzorów (2a) i (2b), podstawienia $t = t_1$, $t = t_2$, $\ldots, t = t_k$ dotyczą czasu t występującego jako argument w sygnale wejściowym, kolejno, $t = t_1$ przy x występującym po raz pierwszy, $t = t_2$ przy x występującym po raz drugi, itd., aż do $t = t_k$ przy x występującym po raz k-ty.

Pamiętając o powyższym, wykonujemy operację odwrotną jak zilustrowano poniżej:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, x(t-\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = \\ &= v^{(3)}(t_1, t_2, t_3).\end{aligned} \quad (4)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2 \qquad t = t_3$$

W świetle powyższego taki wniosek na przykład, że jeżeli dla przewodności $i = av^3$, $v(t) = \cos(t)$, to prąd $i(t) = i^{(1)}(t) + i^{(3)}(t) = 0.75\cos(t) + 0.25\cos(3t)$ jest błędny. Poprawny sposób rozumowania w zastosowaniu do powyższego przykładu powinien wyglądać w następujący sposób:

W zależności od tego, czy sygnał $v(t) = \cos(t)$ jest sygnałem wejściowym (czy też nie) w układzie, w którym występuje nieliniowa przewodność $i = av^3$ (lub układ składa się tylko z tej przewodności), wyróżniamy dwa przypadki. W przypadku $v(t) = \cos(t)$, będącego sygnałem wejściowym możemy napisać:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= a\cos(t)\cos(t)\cos(t) = a\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1)\cos(t-\tau_1)\,d\tau_1 \cdot \\
&\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_2)\cos(t-\tau_2)\,d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_3)\cos(t-\tau_3)\,d\tau_3 = \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big[\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3) \\
&\qquad \cos(t-\tau_1)\cos(t-\tau_2)\cos(t-\tau_3)\big]\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

skąd

$$
\begin{aligned}
i(t) &= i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) + i^{(3)}(t) = i^{(3)}(t) = \\
& \qquad\ \ \underset{0}{\|} \qquad\ \ \underset{0}{\|} \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3) \\
&\qquad \cos(t-\tau_1)\cos(t-\tau_2)\cos(t-\tau_3)]\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

i dalej

$$
\begin{aligned}
& a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big[\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3) \\
& \underset{\substack{\uparrow \\ t=t_1}}{\cos(t-\tau_1)}\,\underset{\substack{\uparrow \\ t=t_2}}{\cos(t-\tau_2)}\,\underset{\substack{\uparrow \\ t=t_3}}{\cos(t-\tau_3)}\big]\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = i^{(3)}(t_1,t_2,t_3)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Po wykonaniu całkowania we wzorze powyżej, otrzymuje się ostatecznie

$$
i^{(3)}(t_1,t_2,t_3) = a\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\,. \tag{8}
$$

A zatem w tym przypadku wynik $i^{(3)}(t_1,t_2,t_3) = a\cos(t_1)$ $\cos(t_2)\cos(t_3)$ jest wynikiem poprawnym; jest on wynikiem jednoznacznym. Z tego względu błędne są też inne wyniki, jak np.

$i^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=0.25\cos(t_1+t_2+t_3)$ lub $i^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=0.25\cos(t_1+2t_2)$ (lub jeszcze inaczej).

W przypadku założenia w przykładzie powyżej, że $v(t)=\cos(t)$ nie jest sygnałem wejściowym, mielibyśmy

$$v(t)=\cos(t)=v^{(1)}(t)+v^{(2)}(t)+v^{(3)}(t)+\ldots, \tag{9}$$

co nie wystarcza do określenia, jaka jest zależność pomiędzy $i^{(3)}(t)$ a $\cos(t)$, gdyż nie jest znana zależność $v(t)$ od sygnału wejściowego. Co jest w tym przypadku znane, to tylko globalna zależność $i(t)=av^3(t)=a\cos^3(t)$, która nie ma nic wspólnego z operacjami opisanymi powyżej.

W celu przejścia z funkcją $y^{(k)}(t_1,...,t_k)$ wielowymiarowego czasu, jaka występuje we wzorze (2b), do dziedziny wielowymiarowej częstotliwości, konieczne jest zastosowanie do tej funkcji wielowymiarowego przekształcenia Fouriera, które definiuje się w następujący sposób:

$$Y^{(k)}(f_1,...,f_k)=$$
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} y^{(k)}(t_1,...,t_k)\exp\left[-j2\pi\left(f_1t_1+...+f_kt_k\right)\right]dt_1....dt_k\,, \tag{10}$$

gdzie $f_1,...,f_k$ są współrzędnymi w *k* - wymiarowej przestrzeni częstotliwościowej.

Transmitancję nieliniową $H^{(k)}(f_1,...,f_k)$ układu definiuje się przy pomocy wzoru (10), podstawiając w nim w miejscu funkcji $y^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)$ funkcję $h^{(k)}(\tau_1,\ldots,\tau_k)$, tj.

$$H^{(k)}(f_1,...,f_k)=$$
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}(t_1,...,t_k)\exp\left[-j2\pi\left(f_1t_1+...+f_kt_k\right)\right]dt_1....dt_k\,. \tag{11}$$

W ten sposób otrzymuje się transformatę Fouriera nieliniowej odpowiedzi impulsowej rzędu *k*, która jest nazywana transmitancją nieliniową rzędu *k*. (Transmitancje nieliniowe $H^{(k)}(f_1,...,f_k)$, $k=1,2.3,....,$ układu można obliczać za pomocą programu komputerowego wykorzystującego, na przykład, zmodyfikowaną macierz admitancyjną, w sposób jaki opisano w pracy [5].)

Zauważmy dalej, że zgodnie ze wzorem (2b), ponieważ odpowiedź impulsowa $h^{(k)}(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ nie zależy od amplitudy sygnału wejściowego (*AMP*), więc jej transformata Fouriera, czyli transmitancja nieliniowa rzędu *k*, również nie zależy od amplitudy *AMP*. Z tego powodu niektórzy preferują dla niej nazwę transmitancja Volterry. W znakomitej większości artykułów i monografiach stosuje się jednakże określenie: transmitancja nieliniowa (rzędu $k = 1, 2, 3, \ldots$). Zaś w przypadku metody funkcji opisującej [29] używa się w literaturze określenia funkcja opisująca układu (która jest zależna od amplitudy sygnału wejściowego), a nie określenia transmitancja nieliniowa.

Istnieją opinie, w których kwestionuje się celowość wprowadzenia wielowymiarowego przekształcenia Fouriera (wielowymiarowej transformaty Fouriera) w zastosowaniach szeregu Volterry - przy wykorzystaniu funkcji wielowymiarowego czasu (jak pokazuje wzór (2b)). Takie opinie są jednakże odosobnione.

Zwróćmy uwagę na fakt, że już w pracach S. Narayanana [20], [21] i J.J. Bussganga, L. Ehrmana, J.W. Grahama [12], które zapoczątkowały w literaturze tematykę analizy zniekształceń nieliniowych w nieliniowych układach elektronicznych, posiadających opis w postaci szeregu Volterry, wprowadzono i szeroko korzystano z wielowymiarowej transformaty Fouriera. Po prostu ułatwia ona analizę i obliczenia zniekształceń nieliniowych (zniekształceń harmonicznych, intermodulacyjnych, modulacji skrośnej, itp.) Celowość stosowania wielowymiarowej transformaty Fouriera nie jest generalnie od tego czasu (tj. od czasu pojawienia się prac wymienionych powyżej) kwestionowana w literaturze dotyczącej analizy zniekształceń nieliniowych z wykorzystaniem szeregu Volterry i z wykorzystaniem reprezentacji jego poszczególnych wyrazów w wielowymiarowej przestrzeni częstotliwościowej (dokładniej reprezentacji składnika rzędu *k* w *k*-wymiarowej przestrzeni częstotliwościowej).

W analizie liniowych układów elektronicznych korzysta się z pobudzenia tych układów impulsem Diraca $\delta(t)$ (czyli jedynką w dziedzinie częstotliwości) w celu wyznaczenia transmitancji (liniowych) tych układów. Podobnie można oczywiście postępować w przypadku elektronicznych układów nieliniowych w celu wyznaczenia transmitancji nieliniowych tych układów. Jednakże wtedy, w zależności od stosowanej metody, mogą pojawić się iloczyny dystrybucji, których to działanie może wydać się być nieokreślone. W tej pracy iloczyny dystrybucji są używane w sensie zdefiniowanym i stosowanym, m. in. w następujących pracach [10], [16] i [22], a więc w sensie określonym w tych publikacjach są one dopuszczalne i określone.

O możliwości wystąpienia w analizie nieliniowych układów elektronicznych przy pomocy szeregu Volterry nieliniowych odpowiedzi impulsowych w postaci iloczynów impulsów Diraca pisał J. Roszkiewicz i autor tego artykułu w pracy [24]. Podejście do problemu przedstawione w [24] nie było krytykowane.

Iloczyny impulsów Diraca, w których argumentem jest częstotliwość, pojawiają się także w analizie nieliniowych układów elektronicznych przy pomocy szeregu Volterry prowadzonej konsekwentnie w dziedzinie częstotliwości, gdy pobudzeniami takich układów są sygnały harmoniczne. Wynika to z faktu, że transformatą Fouriera sygnału harmonicznego $AMP\exp\left(j2\pi f_0 t\right)$ w dziedzinie czasu jest impuls Diraca $AMP\delta\left(f-f_0\right)$ w dziedzinie częstotliwości.

Wyjaśnieniem niejasności i trudności interpretacyjnych, jakie mogą pojawiać się w takiej analizie poświęcony jest następny rozdział.

3 Nowe wyniki dotyczące zagadnień analizy komputerowej

Spróbujmy przyjrzeć się w tym rozdziale dokładniej, kiedy i w jaki sposób pojawiają się iloczyny impulsów Diraca w analizie nielinowych układów elektronicznych wykonywanej przy pomocy szeregu Volterry, gdy pobudzeniami są sygnały harmoniczne. W tym celu przeanalizujmy dla ilustracji problemu, krok po kroku, prosty układ z nieliniową indukcyjnością pokazany na rys. 1.

Układ z rys. 1 jest opisywany w dziedzinie czasu za pomocą następującego układu równań:

$$\begin{cases} C\dfrac{d}{dt}\left(v_1(t)-v_2(t)\right)+i_1(t)=0 \\ -C\dfrac{d}{dt}\left(v_1(t)-v_2(t)\right)+Gv_2(t)+i_{NL}(t)=0 \\ v_1(t)=e_1(t) \\ -v_2(t)+\dfrac{d}{dt}\left(Li_{NL}(t)+l_2 i_{NL}^2(t)+l_3 i_{NL}^3(t)+\cdots\right)=0 \end{cases}, \tag{12}$$

gdzie przyjęto, że strumień magnetyczny $\psi(t)$ na nieliniowej cewce można wyrazić za pomocą szeregu potęgowego, tj.

$$\psi(t)=Li_{NL}(t)+l_2 i_{NL}^2(t)+l_3 i_{NL}^3(t)+\cdots\ . \tag{13}$$

Biorąc następnie pod uwagę występujące w układzie równań (12) napięcia $\left(v_1(t)\text{ i }v_2(t)\right)$, prądy $\left(i_1(t)\text{ i }i_{NL}(t)\right)$ oraz napięcie na napięciowym źródle niesterowanym $e_1(t)$, i rozwijając wszystkie te wielkości w szeregi Volterry (patrz wzory (1a) i (1b) i pamiętając, że sygnałem wejściowym jest $e_1(t)$), otrzymuje się z układu równań (12)

$$\begin{cases} C\dfrac{d}{dt}\Big(v_1^{(1)}(t)+v_1^{(2)}(t)+v_1^{(3)}(t)+\cdots-\Big(v_2^{(1)}(t)+v_2^{(2)}(t)+v_2^{(3)}(t)+\cdots\Big)\Big)+ \\ \qquad +i_1^{(1)}(t)+i_1^{(2)}(t)+i_1^{(3)}(t)+\cdots=0=0+0+0+\cdots \\ -C\dfrac{d}{dt}\Big(v_1^{(1)}(t)+v_1^{(2)}(t)+v_1^{(3)}(t)+\cdots-\Big(v_2^{(1)}(t)+v_2^{(2)}(t)+v_2^{(3)}(t)+\cdots\Big)\Big)+ \\ \qquad +G\Big(v_2^{(1)}(t)+v_2^{(2)}(t)+v_2^{(3)}(t)+\cdots\Big)+ \\ \qquad +i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots=0=0+0+0+\cdots \\ \qquad v_1^{(1)}(t)+v_1^{(2)}(t)+v_1^{(3)}(t)+\cdots=e_1(t)=e_1(t)+0+0+\cdots \\ -\Big(v_2^{(1)}(t)+v_2^{(2)}(t)+v_2^{(3)}(t)+\cdots\Big)+\dfrac{d}{dt}\Big(L\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)+ \\ +l_2\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)^2+l_3\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)^3+\cdots\Big)= \\ \qquad =0=0+0+0+\cdots \end{cases} \tag{14}$$

Zauważmy dalej, że wyrażenie, które jest różniczkowane w ostatnim równaniu układu równań (12), może być przepisane w następującej postaci:

$$\begin{gathered} L\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)+ \\ +l_2\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)^2+l_3\Big(i_{NL}^{(1)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)+\cdots\Big)^3+ \\ \cdots=Li_{NL}^{(1)}(t)+\Big(Li_{NL}^{(2)}(t)+l_2i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)\Big)+ \\ +\Big(Li_{NL}^{(3)}(t)+l_2i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(2)}(t)+l_2i_{NL}^{(2)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)+l_3i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)\Big)+\cdots \end{gathered} \; . \tag{15}$$

Uwzględniając (15) w ostatnim równaniu układu równań (12) i porównując następnie wyrazy tych samych rzędów po obydwu stronach każdego z równań w (12), otrzymamy kolejno

$$\begin{cases} C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(1)}(t)-v_2^{(1)}(t)\right)+i_1^{(1)}(t)=0 \\ -C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(1)}(t)-v_2^{(1)}(t)\right)+Gv_2^{(1)}(t)+i_{NL}^{(1)}(t)=0 \\ v_1^{(1)}(t)=e_1(t) \\ -v_2^{(1)}(t)+L\dfrac{d}{dt}i_{NL}^{(1)}(t)=0, \end{cases} \quad , \tag{16}$$

$$\begin{cases} C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(2)}(t)-v_2^{(2)}(t)\right)+i_1^{(2)}(t)=0 \\ -C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(2)}(t)-v_2^{(2)}(t)\right)+Gv_2^{(2)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)=0 \\ v_1^{(2)}(t)=0 \\ -v_2^{(2)}(t)+L\dfrac{d}{dt}i_{NL}^{(2)}(t)+l_2\dfrac{d}{dt}\left(i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)\right)=0, \end{cases} \quad , \tag{17}$$

$$\begin{cases} C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(3)}(t)-v_2^{(3)}(t)\right)+i_1^{(3)}(t)=0 \\ -C\dfrac{d}{dt}\left(v_1^{(3)}(t)-v_2^{(3)}(t)\right)+Gv_2^{(3)}(t)+i_{NL}^{(3)}(t)=0 \\ v_1^{(3)}(t)=0 \\ -v_2^{(3)}(t)+L\dfrac{d}{dt}i_{NL}^{(3)}(t)+l_2\dfrac{d}{dt}\left(i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(2)}(t)+i_{NL}^{(2)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)\right)+ \\ +l_3\dfrac{d}{dt}\left(i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)i_{NL}^{(1)}(t)\right)=0, \end{cases} \quad , \tag{18}$$

itd., pamiętając, że (liniowa) operacja różniczkowania nie zmienia rzędu wyrazu w szeregu Volterry.

W dalszym ciągu, stosując wielowymiarowe przekształcenie Fouriera, dane wzorem (10), do układów równań (16), (17) i (18), otrzymuje się kolejno następujące układy równań:

$$\begin{cases} j2\pi f_1C\left(V_1^{(1)}(f_1)-V_2^{(1)}(f_1)\right)+I_1^{(1)}(f_1)=0 \\ -j2\pi f_1C\left(V_1^{(1)}(f_1)-V_2^{(1)}(f_1)\right)+GV_2^{(1)}(f_1)+I_{NL}^{(1)}(f_1)=0 \\ V_1^{(1)}(f_1)=E_1(f_1)=E_1^{(1)}(f_1) \\ -V_2^{(1)}(f_1)+j2\pi f_1I_{NL}^{(1)}(f_1)=0, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} j2\pi\left(f_1+f_2\right)C\left(V_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right)-V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)\right)+I_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=0 \\ -j2\pi\left(f_1+f_2\right)C\left(V_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right)-V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)\right)+GV_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)+I_{NL}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=0 \\ V_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=0=E_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right) \\ -V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)+j2\pi\left(f_1+f_2\right)LI_{NL}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)+j2\pi\left(f_1+f_2\right)l_2I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right)=0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} j2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)C\left(V_1^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)-V_2^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)\right)+ \\ +I_1^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)=0 \\ -j2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)C\left(V_1^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)-V_2^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)\right)+ \\ +GV_2^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)+I_{NL}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)=0 \\ V_1^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)=0=E_1^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right) \\ -V_2^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)+j2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)LI_{NL}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)+ \\ +j2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)\left(l_2I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(2)}\left(f_2,f_3\right)+l_2I_{NL}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_3\right)+\right. \\ \left.+l_3I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_3\right)\right)=0, \end{cases} \quad (21)$$

itd., gdzie wprowadzone z dużej litery oznaczenia prądów i napięć są oznaczeniami wielowymiarowych transformat Fouriera odpowiednich składników prądów i napięć w dziedzinie czasu z równań (16), (17) i (18). Zaś częstotliwości f_1, f_2, f_3 w powyższych wzorach są częstotliwościami pomocniczymi z wielowymiarowej przestrzeni częstotliwościowej, odpowiadającymi zmiennym czasowym $t_1,\ t_2,\ t_3$ z wielowymiarowej przestrzeni czasowej.

Przekształcenie odwrotne do przekształcenia danego wzorem (10), czyli wielowymiarowe odwrotne przekształcenie Fouriera, definiuje się za pomocą następującego wzoru:

$$\begin{aligned} &y^{(k)}(t_1,....,t_k)= \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} Y^{(k)}\left(f_1,....,f_k\right)\exp\left[j2\pi(f_1t_1+....+f_kt_k)\right]\cdot df_1....df_k \end{aligned}, \quad (22)$$

gdzie $t_1,....,t_k$ są współrzędnymi w *k*-wymiarowej przestrzeni czasowej, która redukuje się do normalnej jednowymiarowej przestrzeni przy przyjęciu $t_1 =....= t_k = t$.

Z powyżej zdefiniowanego wielowymiarowego odwrotnego przekształcenia Fouriera i wzoru (2a) wynika wzór zastosowany w równaniach (20) i (21) odnoszący się do wyrazów, w których poprzednio w dziedzinie czasu występowała operacja różniczkowania. W celu wykazania powyższego, wykorzystajmy wzór (2a) we wzorze (22), co pozwala nam napisać:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(t) = \frac{d}{dt} y^{(k)}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} & Y^{(k)}(f_1, f_2, \ldots, f_k)\cdot \\
& \cdot\frac{d}{dt}\Big(\exp\big(j2\pi(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)t\big)\Big) df_1 df_2 \cdots df_k = \\
= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} & j2\pi(f_1 + f_2 + \cdots + f_k) Y^{(k)}(f_1, f_2, \ldots, f_k)\cdot \\
& \cdot\exp\big(j2\pi(f_1 t + f_2 t + \cdots + f_k t)\big) df_1 df_2 \cdots df_k
\end{aligned} \quad . \qquad (23a)
$$

Następnie zauważmy, że końcowy rezultat w (23a) można przepisać, w analogii do (22), jako

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} & j2\pi(f_1 + f_2 + \cdots + f_k) Y^{(k)}(f_1, f_2, \ldots, f_k)\cdot \\
& \cdot\exp\big(j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2 + \cdots + f_k t_k)\big) df_1 df_2 \cdots df_k
\end{aligned} \qquad (23b)
$$

(zamieniając t stojące przy f_1 na t_1, t stojące przy f_2 na t_2, itd.) Porównanie wzoru (23b) z definicyjnym wzorem (22), prowadzi do konkluzji, że

$$
j2\pi(f_1 + f_2 + \cdots + f_k) Y^{(k)}(f_1, f_2, \ldots, f_k)
$$

jest wielowymiarową transformatą Fouriera funkcji $\tilde{y}(t)$, czyli $\frac{d}{dt} y^{(k)}(t)$.

Kontynuując poprzednie wyprowadzenia, warto również zauważyć, że układy równań (19), (20), (21), itd., można zapisać w sposób jednolity dla wszystkich rzędów analizy, $k = 1, 2, 3, \ldots$, w następujący sposób:

$$
\begin{cases}
sCV_1^{(k)} - sCV_2^{(k)} + I_1^{(k)} = 0 \\
-sCV_1^{(k)} + (sC + G)V_2^{(k)} + I_{NL}^{(k)} = 0 \\
V_1^{(k)} = E_1^{(k)} \\
S_v^{(k)} - V_2^{(k)} + sLI_{NL}^{(k)} = 0,
\end{cases} \qquad (24)
$$

gdzie $s = j\omega_x$, $\omega_x = 2\pi f_1$ dla $k=1$, $\omega_x = 2\pi\left(f_1+f_2\right)$ dla $k=2$, $\omega_x = 2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)$ dla $k=3$, itd.; $V_1^{(k)} = V_1^{(1)}\left(f_1\right)$ dla $k=1$, $V_1^{(k)} = V_1^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ dla $k=2$, $V_1^{(k)} = V_1^{(2)}\left(f_1,f_2,f_3\right)$ dla $k=3,\ldots$, $V_2^{(k)} = V_2^{(1)}\left(f_1\right)$ dla $k=1$, itd.; $E_1^{(k)} = E_1\left(f_1\right)$ dla $k=1$, $E_1^{(k)}=0$ dla $k=2$, $E_1^{(k)}=0$ dla $k=3$, itd.; $S_v^{(k)} = S_v^{(1)}\left(f_1\right)=0$ dla $k=1$, $S_v^{(k)} = S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right) = j2\pi\left(f_1+f_2\right)l_2 I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)\cdot \quad \cdot I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right)$ dla $k=2$, $S_v^{(k)} = S_v^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right) = j2\pi\left(f_1+f_2+f_3\right)\Big(l_2 I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(2)}\left(f_2,f_3\right)+$
$+l_2 I_{NL}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_3\right)+l_3 I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_3\right)\Big)$ dla $k=3$, itd.

Układ równań (24) można zapisać w postaci równania macierzowego, wykorzystując tzw. zmodyfikowaną macierz admitancyjną. W pracy [5] pokazano, że do napisania zmodyfikowanej macierzy admitancyjnej (ZMA) dla układu nieliniowego dla poszczególnych rzędów analizy (jak również napisania odpowiednich równań macierzowych, wykorzystujących macierz ZMA i opisujących zależności pomiędzy prądami i napięciami w układzie) wystarczy znajomość pewnych reguł mnemotechnicznych, wyprowadzonych w [5]. Nie jest konieczne wypisywanie wszystkich równań pośrednich.

W analizach wyższych rzędów, tj. dla $k \geq 2$, występują źródła napięciowe $S_v^{(k)}$ i prądowe $S_I^{(k)}$ o niezerowych wydajnościach. Wynikają one ze sposobu modelowania elementów nieliniowych układu (jak pokazano przykładowo na rys. 1).

Ten sposób modelowania elementów nieliniowych w częstotliwościowej analizie układów przy pomocy szeregu Volterry, za pomocą części liniowej elementu z dołączonymi (szeregowo) źródłami napięciowymi $S_v^{(k)}$ lub (równolegle) źródłami prądowymi $S_I^{(k)}$, pojawił się po raz pierwszy w literaturze w pracy [12] i był wykorzystywany następnie przez wielu innych autorów [5], [9], [14], [24]. W powyższych pracach podano wzory na wydajności źródeł $S_v^{(k)}$ i $S_I^{(k)}$ dla poszczególnych elementów podstawowych, z których składają się układy nieliniowe. Przykładowo dla nieliniowej indukcyjności, dla $k=2$ i $k=3$, są one podane tutaj w objaśnieniach zamieszczonych pod wzorem (24).

Powracając do sprawy pokazania, na przykładzie układu z rys. 1, skąd się biorą w analizie iloczyny impulsów Diraca, rozwiążmy układ równań (24) dla $k=1$ w celu znalezienia prądu $I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)$. Widzimy, że podstawiając $V_1^{(1)}\left(f_1\right)=E_1^{(1)}\left(f_1\right)$ z trzeciego równania do drugiego równania w (24), i następnie łącząc drugie równanie z czwartym oraz rozwiązując dla $I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)$, otrzymujemy w wyniku

$$I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)=\frac{j2\pi f_1 C\cdot E_1\left(f_1\right)}{1-\left(2\pi f_1\right)^2 LC+j2\pi f_1 LG}. \tag{25}$$

Dla uproszczenia przyjmijmy tutaj, że sygnał pobudzający układ składa się tylko z jednego składnika harmonicznego o częstotliwości f_0. (W pracy [9] wyprowadzono ogólniejszy algorytm obliczeń dla pobudzenia układu sumą sygnałów harmonicznych o częstotliwości podstawowej f_0.) A więc w naszym uproszczonym przypadku przyjmujemy

$$e_1\left(t\right)=AMP\exp\left(j2\pi f_0 t\right) \tag{26}$$

w dziedzinie czasu, co oznacza w dziedzinie częstotliwości

$$E_1\left(f\right)=AMP\delta\left(f-f_0\right). \tag{27}$$

Weźmy następnie pod uwagę, przykładowo, źródło $S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$, którego wydajność podano w objaśnieniach zamieszczonych pod układem równań (24), tj. wzorem

$$S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=j2\pi\left(f_1+f_2\right)l_2 I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right). \tag{28}$$

Źródło to występuje w analizie drugiego rzędu (dla $k=2$ w równaniu (24)).

Sprawdźmy jaką postać ma wzór na wydajność tego źródła, gdy pobudzenie układu ma postać daną wzorem (26). W tym celu podstawmy wpierw $E_1\left(f\right)$ dane wzorem (27) do wzoru (25), otrzymując

$$I_{NL}^{(1)}\left(f_1\right)=\frac{j2\pi f_1 C}{1-\left(2\pi f_1\right)^2 LC+j2\pi f_1 LG}AMP\delta\left(f_1-f_0\right). \tag{29}$$

(Oczywiście identyczne wyrażenie jak (29) otrzymamy dla drugiej częstotliwości posiłkowej f_2, tj.

$$I_{NL}^{(1)}\left(f_2\right)=\frac{j2\pi f_2 C}{1-\left(2\pi f_2\right)^2 LC+j2\pi f_2 LG}AMP\delta\left(f_2-f_0\right)). \tag{30}$$

Podstawienie (29) i (30) do wzoru (28) daje w wyniku

$$S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=j2\pi\left(f_1+f_2\right)l_2\frac{j2\pi f_1C\cdot AMP}{1-\left(2\pi f_1\right)^2LC+j2\pi f_1LG}\cdot$$
$$\cdot\frac{j2\pi f_2C\cdot AMP}{1-\left(2\pi f_2\right)^2LC+j2\pi f_2LG}\cdot\delta\left(f_1-f_0\right)\delta\left(f_2-f_0\right). \tag{31}$$

W powyższym wyrażeniu występuje iloczyn impulsów Diraca $\delta\left(f_1-f_0\right)\delta\left(f_2-f_0\right)$.

Podobnie, przy rozpatrywaniu źródła $S_v^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)$ wystąpi iloczyn impulsów Diraca $\delta\left(f_1-f_0\right)\delta\left(f_2-f_0\right)\delta\left(f_3-f_0\right)$.

Jak widać z powyższego, źródłem występowania iloczynów impulsów Diraca w omawianej w pracy [9] metodzie analizy nieliniowej są pobudzenia periodyczne (tj. pobudzenia dające się rozwinąć w szereg Fouriera). Sygnały te w dziedzinie częstotliwości mają reprezentacje w postaci pojedynczych impulsów Diraca albo skończonych lub nieskończonych sum takich impulsów. A ponieważ omawiana w pracy [9] metoda analizy jest metodą operującą w dziedzinie częstotliwości, występują w niej sytuacje takie, jak ta przedstawiona w równaniu (31), gdzie wystąpił iloczyn dwóch impulsów Diraca.

Na marginesie, zauważmy, że zachodzi następująca równość:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F\left(f\right)\delta\left(f-f_0\right)df=F\left(f_0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(f_0\right)\delta\left(f-f_0\right)df\,, \tag{32}$$

która uzasadnia stosowanie zapisu

$$F\left(f\right)\delta\left(f-f_0\right)=F\left(f_0\right)\delta\left(f-f_0\right). \tag{33}$$

Zależność dana wzorem (33) jest nazywana w literaturze własnością filtrującą impulsu Diraca.

Stosując filtrującą własność impulsu Diraca we wzorze (31), można ten wzór przepisać w następującej postaci:

$$S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=j2\pi\left(2f_0\right)l_2\left(\frac{j2\pi f_0C\cdot AMP}{1-\left(2\pi f_0\right)^2LC+j2\pi f_0LG}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\delta\left(f_1-f_0\right)\delta\left(f_2-f_0\right) \tag{34}$$

Wystąpienie iloczynów impulsów Diraca, jak we wzorze (31) lub we wzorze (34), rodzi pytanie, czy przypadkiem przedstawiona metoda nie prowadzi do fałszywych wyników. Pokażemy, że w tej metodzie nie otrzymuje się fałszywych rezultatów.

Aby się o tym przekonać, powróćmy ponownie do przykładu układu z rys. 1 i rozwiążmy dla tego układu równania (24) dla $k = 2$; skoncentrujmy się na wyznaczeniu napięcia $V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ przy pobudzeniu układu sygnałem danym wzorem (27). Z równania trzeciego w (24), przy $E_1^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = 0$ (patrz objaśnienia poniżej równania (24)), wynika natychmiast, że $V_1^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = 0$. Podstawiając następnie powyższy rezultat do drugiego równania w (24), łącząc z czwartym równaniem w (24), i na koniec rozwiązując w celu wyznaczenia $V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$, otrzymujemy

$$V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = \frac{S_v^{(2)}\left(f_1, f_2\right)}{1 - \left(2\pi\left(f_1 + f_2\right)\right)^2 LC + j2\pi\left(f_1 + f_2\right)LG}. \tag{35}$$

Podstawiając dalej $S_v^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ dane wzorem (31) w (35), mamy

$$V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = H_{v_2}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) AMP^2 \delta\left(f_1 - f_0\right) \delta\left(f_2 - f_0\right), \tag{36}$$

gdzie funkcja $H_{v_2}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ ma następującą postać:

$$\begin{aligned} H_{v_2}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = & \frac{j2\pi\left(f_1 + f_2\right) l_2}{1 - \left(2\pi\left(f_1 + f_2\right)\right)^2 LC + j2\pi\left(f_1 + f_2\right)LG} \cdot \\ & \cdot \frac{j2\pi f_1 C}{1 - \left(2\pi f_1\right)^2 LC + j2\pi f_1 LG} \cdot \frac{j2\pi f_2 C}{1 - \left(2\pi f_2\right)^2 LC + j2\pi f_2 LG}. \end{aligned} \tag{37}$$

W celu zinterpretowania otrzymanego równania (36), weźmy ponownie pod uwagę równanie (2b), określające *k*-ty wyraz w szeregu Volterry (z wprowadzonymi zmiennymi pomocniczymi $t_1, \ldots, t_k$, zgodnie z podaną w rozdziale 2 regułą). Ponieważ w rozpatrywanym przez nas przykładzie sygnał wejściowy $x\left(t\right)$ jest dany wzorem (26), tj. mamy $x\left(t\right) = e_1\left(t\right) = AMP \exp\left(j2\pi f_0 t\right)$, wprowadźmy tę postać sygnału wejściowego do równania (2b). W konsekwencji otrzymamy

$$y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)AMP^k\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{k}\exp\left(j2\pi f_0\left(t_i-\tau_i\right)\right)d\tau_i. \tag{38}$$

Następnie, w celu otrzymania transformaty Fouriera $y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right)$, podstawiamy (38) do wzoru (10). W wyniku dostajemy

$$Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)AMP^k\cdot$$
$$\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_1-f_0\right)t_1\right)\cdots\exp\left(-j2\pi\left(f_k-f_0\right)t_k\right)\cdot \tag{39}$$
$$\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_0\tau_1+\cdots+f_0\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k dt_1\cdots dt_k.$$

Dalsze przekształcenie wzoru (39) prowadzi do

$$Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)=$$
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_0\tau_1+\cdots+f_0\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k\cdot$$
$$\cdot AMP\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-j2\pi\left(f_1-f_0\right)t_1\right)dt_1\cdots \tag{40}$$
$$\cdot AMP\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-j2\pi\left(f_k-f_0\right)t_k\right)dt_k,$$

a ponieważ

$$H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_0\tau_1+\cdots+f_0\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k \tag{41}$$

(zgodnie ze wzorem (10)) oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j2\pi\left(f_1 - f_0\right)t_1\right)dt_1 = \delta\left(f_0 - f_1\right) = \delta\left(f_1 - f_0\right), \tag{42}$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j2\pi\left(f_k - f_0\right)t_k\right)dt_k = \delta\left(f_0 - f_k\right) = \delta\left(f_k - f_0\right) \tag{43}$$

(przy zastosowaniu transformaty odwrotnej impulsu Diraca ze zmienioną interpretacją zmiennej czasowej i częstotliwościowej oraz przy wykorzystaniu własności parzystości impulsu Diraca, albo postępując w powyższych wzorach w następujący sposób:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j2\pi\left(f_1 - f_0\right)t_1\right)dt_1 = -\int_{\infty}^{-\infty} \exp\left(j2\pi\left(f_1 - f_0\right)\tau_1\right)d\tau_1 =$$

$$\underbrace{}_{t_1 = -\tau_1} \quad \underbrace{}_{dt_1 = -d\tau_1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j2\pi\left(f_1 - f_0\right)\tau_1\right)d\tau_1 = \delta\left(f_1 - f_0\right),$$

możemy ostatecznie przepisać (40) w postaci

$$\begin{aligned} &Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) = \\ &= H^{(k)}\left(f_1 = f_0,\ldots,f_k = f_0\right) AMP^k \delta\left(f_1 - f_0\right)\cdots\delta\left(f_k - f_0\right) \end{aligned}. \tag{44}$$

W celu porównania wzoru (44) ze wzorem (36), musimy przyjąć w nim $k = 2$, co daje

$$\begin{aligned} &Y^{(2)}\left(f_1,f_2\right) = \\ &= H^{(2)}\left(f_1 = f_0, f_2 = f_0\right) AMP^2 \delta\left(f_1 - f_0\right)\delta\left(f_2 - f_0\right) \end{aligned}. \tag{45}$$

Porównując wyrazy występujące w (45) z odpowiadającymi im wyrazami w (36), widzimy, że :

$V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ jest dwuwymiarową transformatą Fouriera napięcia $v_2^{(2)}\left(t\right)$ (dokładniej, transformatą drugiego składnika w rozwinięciu w szereg Volterry napięcia w węźle drugim, $v_2\left(t\right)$).

Przed przystąpieniem do interpretacji wyrazu $H_{v_2}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ w (36), przy zastosowaniu filtrującej własności impulsu Diraca, wyrażonej wzorem (33) (i zilustrowanej już poprzednio przykładem zastosowania (por. wzór (34))), można (36) przepisać w następującej postaci:

$$V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = H_{v_2}^{(2)}\left(f_0, f_0\right) AMP^2 \delta\left(f_1 - f_0\right) \delta\left(f_2 - f_0\right). \tag{46}$$

Zatem, korzystając z równania (46) i porównując go z równaniem (45), widzimy, że $H_{v_2}^{(2)}\left(f_0, f_0\right)$ jest nieliniową transmitancją drugiego rzędu z wejścia układu do węzła drugiego, obliczoną dla częstotliwości pomocniczych $f_1 = f_0$ i $f_2 = f_0$ (tj. w punkcie $\left(f_0, f_0\right)$ dwuwymiarowej przestrzeni częstotliwościowej).

W rozpatrywanym przykładzie transmitancja nieliniowa $H_{v_2}^{(2)}\left(f_0, f_0\right)$ wyraża się wzorem:

$$H_{v_2}^{(2)}\left(f_0, f_0\right) =$$

$$= \frac{j4\pi f_0 l_2}{1 - \left(4\pi f_0\right)^2 LC + j4\pi f_0 LG} \left(\frac{j2\pi f_0 C}{1 - \left(2\pi f_0\right)^2 LC + j2\pi f_0 LG} \right)^2 \tag{47}$$

(który otrzymuje się podstawiając $f_1 = f_0$ i $f_2 = f_0$ do wzoru (37)).

$V_2^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ ma postać:

transmitancja nieliniowa drugiego rzędu (obliczona we właściwym punkcie) $\times$ amplituda sygnału wejściowego do kwadratu $\times$ iloczyn impulsów Diraca $\left(\delta\left(f_1 - f_0\right) \delta\left(f_2 - f_0\right)\right)$.

Może się wydawać, że takie wzory jak wzór (46), gdzie występują iloczyny impulsów Diraca, są niepoprawne. Pokażemy, że tak jednakże nie jest.

W tym celu weźmiemy pod uwagę wzór (22), określający wielowymiarowe odwrotne przekształcenie Fouriera, i podstawimy do niego $Y^{(k)}\left(f_1, \ldots, f_k\right)$ dane wzorem (44). W wyniku otrzymamy

$$\begin{aligned}
y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)\cdot \\
&\cdot AMP^k\delta\left(f_1-f_0\right)\cdots\delta\left(f_k-f_0\right)\cdot \\
&\cdot\exp\left(j2\pi\left(f_1t_1+\cdots+f_kt_k\right)\right)df_1\cdots df_k = \\
&= H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)AMP^k\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(f_1-f_0\right)\exp\left(j2\pi f_1t_1\right)df_1\cdots \\
&\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(f_k-f_0\right)\exp\left(j2\pi f_kt_k\right)df_k.
\end{aligned} \tag{48}$$

Korzystając z filtrującej własności impulsu Diraca, określonej wzorem (33), to znaczy mogąc napisać

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(f_1-f_0\right)\exp\left(j2\pi f_1t_1\right)df_1 = \exp\left(j2\pi f_0t_1\right), \tag{49}$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(f_k-f_0\right)\exp\left(j2\pi f_kt_k\right)df_k = \exp\left(j2\pi f_0t_k\right) \tag{50}$$

we wzorze (48), możemy przepisać ten wzór w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
&y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) = H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)\cdot AMP^k\cdot \\
&\exp\left(j2\pi f_0t_1\right)\cdots\exp\left(j2\pi f_0t_k\right)
\end{aligned} \tag{51}$$

Podstawienie $t_1=\ldots=t_k=t$ (zgodnie ze wzorem (2a)) we wzorze (51) daje w rezultacie

$$\begin{aligned}
&y^{(k)}\left(t\right) = H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)\cdot AMP^k\cdot \\
&\cdot\underbrace{\exp\left(j2\pi f_0t\right)\cdots\exp\left(j2\pi f_0t\right)}_{k\ \text{razy}} = \\
&= H^{(k)}\left(f_1=f_0,\ldots,f_k=f_0\right)\cdot AMP^k\cdot\exp\left(j2\pi kf_0t\right).
\end{aligned} \tag{52}$$

Dla $k=2$ otrzymujemy ze wzoru (52)

$$y^{(2)}\left(t\right) = H^{(2)}\left(f_1=f_0,f_2=f_0\right)\cdot AMP^2\cdot\exp\left(j2\pi\left(2f_0\right)t\right). \tag{53}$$

Ponieważ, jak wynika z powyższego wyprowadzenia, $y^{(2)}(t)$ dane wzorem (53) jest przedstawieniem w dziedzinie czasu $Y^{(2)}(f_1, f_2)$ danego wzorem (45), więc iloczynowi impulsów Diraca $\delta(f_1 - f_0)\delta(f_2 - f_0)$ w (45) odpowiada wyraz $\exp(j2\pi(2f_0)t)$ we wzorze (53). Innymi słowy, iloczynowi impulsów Diraca $\delta(f_1 - f_0)\delta(f_2 - f_0)$ w dziedzinie dwuwymiarowej przestrzeni częstotliwościowej odpowiada składnik harmoniczny o częstotliwości $2f_0$ w dziedzinie zwykłego czasu t. Powyższe udowadnia poprawność wzoru (45).

Zajmijmy się teraz innym przypadkiem pobudzenia układu nieliniowego, o którym wspomniano w rozdziale 2, a mianowicie przypadkiem, w którym sygnałem wejściowym jest sygnał w postaci impulsu Diraca $\delta(t)$ (czyli jedynka w dziedzinie częstotliwości). Z takiego rodzaju pobudzenia korzysta się w analizie liniowych układów elektronicznych w celu wyznaczenia ich transmitancji. Podobnie postępuje się również w przypadku nieliniowych układów elektronicznych w celu wyznaczenia nieliniowych transmitancji tych układów [9].

Dla ilustracji powyższego przypadku weźmiemy ponownie pod uwagę układ nieliniowy z rys. 1 i skorzystamy z przed chwilą wyprowadzonych wzorów. A zatem założymy teraz, że w układzie z rys. 1 mamy

$$e_1(t) = \delta(t) \tag{54}$$

(w dziedzinie czasu), i

$$E_1(f) = 1 \tag{55}$$

w dziedzinie częstotliwości. W tym przypadku, korzystając ze wzoru (25), dostajemy

$$I_{NL}^{(1)}(f_1) = \frac{j2\pi f_1 C}{1 - (2\pi f_1)^2 LC + j2\pi f_1 LG}, \tag{56}$$

oraz dalej, korzystając ze wzoru (28) i wzoru (56), mamy

$$\begin{aligned} S_v^{(2)}(f_1, f_2) = j2\pi(f_1 + f_2)l_2 \frac{j2\pi f_1 C}{1 - (2\pi f_1)^2 LC + j2\pi f_1 LG} \cdot \\ \cdot \frac{j2\pi f_2 C}{1 - (2\pi f_2)^2 LC + j2\pi f_2 LG}; \end{aligned} \tag{57}$$

podstawiając na koniec $S_v^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ określone wzorem (57) w równaniu (35), otrzymamy

$$V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)=H_{v_2}^{(2)}\left(f_1,f_2\right), \tag{58}$$

gdzie $H_{v_2}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ jest określone tym samym wzorem co poprzednio, tj. wzorem (37).

Jak widać ze wzoru (58), transmitancja nieliniowa $H_{v_2}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ może być obliczona jako napięcie $V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$, gdy sygnałem wejściowym w układzie jest impuls Diraca $\delta\left(t\right)$. Transmitancja ta nie zależy od amplitudy (postaci) sygnału wejściowego (por. wzór (37)). Od amplitudy (postaci) sygnału wejściowego zależy napięcie $V_2^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ (dokładniej, dwuwymiarowa transformata Fouriera drugiego składnika w rozwinięciu w szereg Volterry napięcia w drugim węźle układu, $v_2\left(t\right)$), jak to pokazują wzory (36) i (46). Ale, dla tej szczególnej postaci sygnału wejściowego, jakim jest impuls Diraca ($e_1\left(t\right)=\delta\left(t\right), E_1\left(f\right)=1$), otrzymuje się równość (58).

W programach komputerowych [5], [9], [23] służących do obliczeń zniekształceń harmonicznych i intermodulacyjnych [19] przy wykorzystaniu szeregu Volterry nie liczy się transmitancji $H_{v_2}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)$ dla wszystkich możliwych punktów częstotliwościowych $\left(f_1,f_2\right)$, a tylko dla tych potrzebnych do przeprowadzenia przyjętej analizy zniekształceń nieliniowych (na przykład analizy zniekształceń harmonicznych drugiego i trzeciego rzędu). Zagadnienie to zostało szczegółowo omówione w pracach [5], [9] i [23].

Jeżeli jest to analiza zniekształceń harmonicznych, to sygnał wejściowy składa się ze składników typu przedstawionego we wzorze (26), a o wyborze punktu częstotliwościowego $\left(f_1,f_2\right)$ (ewentualnie więcej punktów częstotliwościowych $\left(f_1,f_2\right)$) decydują własności filtrujące impulsu Diraca $\left(\exp\left(j2\pi f_0 t\right)\leftrightarrow\delta\left(f-f_0\right)\right)$, jak to pokazuje przykładowo wzór (46). W przypadku analizy zniekształceń harmonicznych drugiego rzędu wybiera się punkt $\left(f_1,f_2\right)=\left(f_0,f_0\right)$ [5], [9].

Po obliczeniu transmitancji nieliniowych (z zastosowaniem pomocniczego sygnału wejściowego w postaci impulsu Diraca $\delta\left(t\right)$, dla wymaganych punktów częstotliwościo-wych), trzeba w następnym kroku uwzględnić postać sygnału wejściowego, jaki jest zastosowany w wybranej analizie zniekształceń nieliniowych. Wykonuje się to poprzez zastosowanie właściwego wzoru dla dziedziny częstotliwości lub odpowiedniego wzoru dla dziedziny czasu.

W rozpatrywanym tutaj przypadku, właściwym wzorem w dziedzinie częstotliwości jest wzór (45), a jego odpowiednikiem w dziedzinie czasu wzór (53).

Przedstawiony powyżej schemat postępowania jest tym samym schematem, który został zastosowany w pracy [9] przy formułowaniu zadań do wykonania i ich rozwiązywaniu przez program komputerowy w algorytmie obliczeń odpowiedzi układu nieliniowego na pobudzenie sygnałem periodycznym. W tych zadaniach do wykonania przez program komputerowy nigdzie nie występują iloczyny impulsów Diraca. Analiza w tych przypadkach jest wykonywana każdorazowo według schematu naszkicowanego w równaniach od (55) do (58) (z małą modyfikacją, że w równaniu odnoszącym się w pracy [9] do analizy pierwszego rzędu zamiast jedynek występują stałe współczynniki). Uzupełnienie do postaci odzwierciedlającej właściwą postać sygnału wejściowego następuje później.

W literaturze istnieje metoda związana z szeregami Volterry, która pozwala na uniknięcie występowania iloczynów impulsów Diraca przy obliczaniu odpowiedzi układów nieliniowych na pobudzenia w postaci sygnałów harmonicznych. Jest to metoda, w której wyprowadzenia prowadzi się konsekwentnie w dziedzinie czasu, korzystając tylko w jednym miejscu (wyprowadzeń) z pojęcia wielowymiarowej transformaty Fouriera nieliniowej odpowiedzi impulsowej rzędu *k* układu.

Poprawność częstotliwościowej metody z pracy [9], gdzie występują iloczyny impulsów Diraca, można łatwo zweryfikować przy pomocy powyższej metody.

Metoda z konsekwentnym prowadzeniem wyprowadzeń w dziedzinie czasu była stosowana w literaturze, m.in. w pracach [12], [14] przy wyprowadzaniu równań węzłowych układu (z zastosowaniem tzw. sygnału próbnego) oraz przy wyprowadzaniu innych użytecznych wyrażeń z zakresu analizy nieliniowej z zastosowaniem szeregów Volterry.

Zilustrujmy dla przypomnienia zasady ww. metody na przykładzie analizy drugiego rzędu układu z rys. 1. W tym celu weźmy ponownie pod uwagę wzór (2b), tj.

$$y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\prod_{i=1}^{k}x\left(t_i-\tau_i\right)d\tau_i,$$

ograniczając się do rozpatrzenia tylko wyrazów pierwszego i drugiego rzędu (odpowiednio, przy $t_1 = t$ i przy $t_1 = t_2 = t$), to znaczy ograniczając się do rozpatrzenia

$$y^{(1)}(t_1)\Big|_{t_1=t} = y^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\, x(t-\tau_1)\, d\tau_1 \tag{59}$$

i

$$y^{(2)}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=t} = y^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2. \tag{60}$$

Jako sygnał wejściowy $x(t)$ w równaniach (59) i (60) przyjmijmy sumę dwóch eksponent $\exp(j2\pi f_x t)$ o częstotliwościach $f_x = f_{01}$ i $f_x = f_{02}$ oraz jednostkowych amplitudach, tj.

$$x(t) = \exp(j2\pi f_{01} t) + \exp(j2\pi f_{02} t). \tag{61}$$

Sygnał $x(t)$ w postaci danej wzorem (61) nazywa się sygnałem próbnym. W analizie, w której należy określić transmitancje nieliniowe pierwszego i drugiego rzędu, suma w (61) musi się składać z co najmniej dwóch eksponent. Zauważmy też, że jeżeli założy się $f_{01} = f_0$ i $f_{02} = -f_0$ w (61), to $x(t)$ przyjmie postać $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$.

Podstawiając $x(t)$ dane wzorem (61) w (59) i (60), otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned}
y^{(1)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\big(\exp(j2\pi f_{01}(t-\tau_1)) + \exp(j2\pi f_{02}(t-\tau_1))\big)\, d\tau_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp(-j2\pi f_{01}\tau_1)\exp(j2\pi f_{01} t)\, d\tau_1 + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp(-j2\pi f_{02}\tau_1)\exp(j2\pi f_{02} t)\, d\tau_1 = \\
&= \exp(j2\pi f_{01} t)\int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp(-j2\pi f_{01}\tau_1)\, d\tau_1 + \\
&+ \exp(j2\pi f_{02} t)\int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp(-j2\pi f_{02}\tau_1)\, d\tau_1
\end{aligned} \tag{62}$$

i

$$\begin{aligned}
y^{(2)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\Big(\exp\big(j2\pi f_{01}(t-\tau_1)\big)+\exp\big(j2\pi f_{02}(t-\tau_1)\big)\Big)\cdot \\
&\quad\cdot\Big(\exp\big(j2\pi f_{01}(t-\tau_2)\big)+\exp\big(j2\pi f_{02}(t-\tau_2)\big)\Big)d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \exp\big(j2\pi(f_{01}+f_{01})t\big)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{01}\tau_1+f_{01}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+\exp\big(j2\pi(f_{01}+f_{02})t\big)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{01}\tau_1+f_{02}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+\exp\big(j2\pi(f_{02}+f_{01})t\big)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{02}\tau_1+f_{01}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+\exp\big(j2\pi(f_{02}+f_{02})t\big)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{02}\tau_1+f_{02}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 .
\end{aligned} \tag{63}$$

Następnie wykorzystamy fakt, że, zgodnie ze wzorem (10), następujące wyrażenia, występujące w równaniach (62) i (63), przedstawiają sobą odpowiednie transmitancje nieliniowe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp\big(-j2\pi f_{01}\tau_1\big)d\tau_1 = H^{(1)}(f_{01}), \tag{64}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(\tau_1)\exp\big(-j2\pi f_{02}\tau_1\big)d\tau_1 = H^{(1)}(f_{02}), \tag{65}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{01}\tau_1+f_{01}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 = H^{(2)}(f_{01},f_{01}), \tag{66}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{01}\tau_1+f_{02}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 = H^{(2)}(f_{01},f_{02}), \tag{67}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{02}\tau_1+f_{01}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 = H^{(2)}(f_{02},f_{01}), \tag{68}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\big(-j2\pi(f_{02}\tau_1+f_{02}\tau_2)\big)d\tau_1 d\tau_2 = H^{(2)}(f_{02},f_{02}). \tag{69}$$

A zatem, wprowadzając zależności (64-69) w równaniach (62) i (63), możemy napisać

$$y^{(1)}(t)=H^{(1)}(f_{01})\exp(j2\pi f_{01}t)+H^{(1)}(f_{02})\exp(j2\pi f_{02}t) \tag{70}$$

oraz

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t)=H^{(2)}(f_{01},f_{01})\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right)+\\ +H^{(2)}(f_{01},f_{02})\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right)+\\ +H^{(2)}(f_{02},f_{01})\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right)+\\ +H^{(2)}(f_{02},f_{02})\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Sprawdźmy teraz, jaką postać przyjmują modele podstawowych elementów nieliniowych, które wyprowadza się w analizie nieliniowych układów elektronicznych z wykorzystaniem szeregu Volterry [5], [9], [12], [14]. W tym celu posłużymy się przykładem nieliniowej przewodności opisanej następującym równaniem:

$$i_{NG}(t)=g_1v_{NG}(t)+g_2v_{NG}^2(t)+g_3v_{NG}^3(t)+\cdots\ . \tag{72}$$

Przyjmując we wzorze (72), że prąd $i_{NG}(t)$ i napięcie $v_{NG}(t)$ można rozwinąć w szeregi Volterry, zgodnie ze wzorami (1a) i (1b), otrzymuje się

$$\begin{aligned} i_{NG}^{(1)}+i_{NG}^{(2)}+i_{NG}^{(3)}+\cdots=g_1v_{NG}^{(1)}+\left[g_1v_{NG}^{(2)}+g_2v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}\right]+\\ +\left[g_1v_{NG}^{(3)}+g_2v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(2)}+g_2v_{NG}^{(2)}v_{NG}^{(1)}+g_3v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}\right]+\cdots \end{aligned}, \tag{73}$$

gdzie opuszczono argument t w celu skrócenia zapisu.

W metodzie przedstawionej w pracy [9] przyrównano wyrazy tych samych rzędów występujące po obydwu stronach równania (73), otrzymując

$$i_{NG}^{(1)}=g_1v_{NG}^{(1)}\ , \tag{74a}$$

$$i_{NG}^{(2)}=g_1v_{NG}^{(2)}+g_2v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}\ , \tag{74b}$$

$$i_{NG}^{(3)}=g_1v_{NG}^{(3)}+g_2v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(2)}+g_2v_{NG}^{(2)}v_{NG}^{(1)}+g_3v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}v_{NG}^{(1)}\ . \tag{74c}$$

Następnie, po zastosowaniu wielowymiarowych transformat Fouriera do równań (74), otrzymano następujące równania w dziedzinie częstotliwości:

$$I_{NG}^{(1)}=g_1V_{NG}^{(1)}\ , \tag{75a}$$

$$I_{NG}^{(2)} = g_1 V_{NG}^{(2)} + g_2 V_{NG}^{(1)} V_{NG}^{(1)} \;, \tag{75b}$$

$$I_{NG}^{(3)} = g_1 V_{NG}^{(3)} + g_2 V_{NG}^{(1)} V_{NG}^{(2)} + g_2 V_{NG}^{(2)} V_{NG}^{(1)} + g_3 V_{NG}^{(1)} V_{NG}^{(1)} V_{NG}^{(1)} \;, \tag{75c}$$

gdzie $I_{NG}^{(k)}$ i $V_{NG}^{(k)}$ są *k*-wymiarowymi transformatami Fouriera, odpowiednio, prądu i napięcia.

W metodzie z sygnałem próbnym korzystamy w równaniu (73) z przedstawień w postaci danej wzorami (70) i (71) dla prądów $i_{NG}^{(1)}$ i $i_{NG}^{(2)}$ oraz napięć $v_{NG}^{(1)}$ i $v_{NG}^{(2)}$. Po wykonaniu tych podstawień, równanie (73) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
&H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi f_{01}t\right)+\\
&+H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi f_{02}t\right)+H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right)+\\
&+H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right)+H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right)+\\
&+H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right)+\cdots=\\
&=g_1H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi f_{01}t\right)+g_1H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi f_{02}t\right)+\\
&+\Big[g_1\Big(H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right)+H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right)+\\
&+H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right)+H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right)\Big)+\\
&+g_2\Big(H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right)+\\
&+H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right)+\\
&+H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right)+\\
&+H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right)\Big)\Big]+\cdots,
\end{aligned} \tag{76}$$

gdzie $H_{I_{NG}}^{(1)}(\cdot)$ oznacza transmitancję nieliniową pierwszego rzędu (transmitancję liniową) od miejsca przyłożenia sygnału wejściowego w układzie do gałęzi, w której płynie prąd w nieliniowej przewodności *NG* znajdującej się w układzie. Natomiast $H_{I_{NG}}^{(2)}(\cdot,\cdot)$ oznacza transmitancję nieliniową drugiego rzędu od miejsca przyłożenia sygnału wejściowego w układzie do gałęzi, w której płynie prąd przez nieliniową przewodność *NG* znajdującą się w układzie. Transmitancje $H_{V_{NG}}^{(1)}(\cdot)$ i $H_{V_{NG}}^{(2)}(\cdot,\cdot)$ występujące w równaniu (76) są zdefiniowane w podobny sposób.

Porządkując i porównując wyrazy z tymi samymi eksponentami po obydwu stronach równania (76), otrzymamy kolejno

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi f_{01}t\right)=g_1H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\exp\left(j2\pi f_{01}t\right), \tag{77}$$

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi f_{02}t\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\exp\left(j2\pi f_{02}t\right) \tag{78}$$

(powyższe dwa równania mogą być rozumiane jako odpowiedniki równania (74a)),

$$\begin{aligned}&H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right)=\\&=\left[g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\right]\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{01}\right)t\right),\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}&H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right)=\\&=\left[g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\right]\exp\left(j2\pi\left(f_{01}+f_{02}\right)t\right),\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}&H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right)=\\&=\left[g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)\right]\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{01}\right)t\right),\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}&H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right)=\\&=\left[g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)\right]\exp\left(j2\pi\left(f_{02}+f_{02}\right)t\right)\end{aligned} \tag{82}$$

(powyższe cztery równania mogą być rozumiane jako odpowiedniki równania (74b)).

Pozbywając się eksponent w równaniach (77), (78), (79), (80), (81) i (82), otrzymamy w wyniku

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right), \tag{83}$$

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right), \tag{84}$$

$$H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{01}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right), \tag{85}$$

$$H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{01},f_{02}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right), \tag{86}$$

$$H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{01}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{01}\right), \tag{87}$$

$$H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)=g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_{02},f_{02}\right)+g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right)H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_{02}\right). \tag{88}$$

(Zauważmy, że równania (83) i (84) mogą być rozumiane jako odpowiedniki równania (75a), natomiast równania (85-88) jako odpowiedniki równania (75b)).

W gruncie rzeczy wiele z podanych powyżej równań jest nadmiarowych: dla analizy pierwszego rzędu wystarczy wziąć tylko jedno z równań (83) i (84), natomiast dla analizy drugiego rzędu wystarczy wziąć tylko jedno z czterech równań (85-88). W dalszych rozważaniach weźmiemy zatem pod uwagę tylko równanie (83) (pomijając równanie (84)) i tylko równanie (86) (pomijając równania (85), (87) i (88)). Wprowadzimy dalej w rozpatrywanych równaniach uproszczone oznaczenie dla częstotliwości: $f_{01} = f_1$ i $f_{02} = f_2$ oraz załóżmy, że f_1 i f_2 mogą się zmieniać w granicach od $-\infty$ do $+\infty$. A więc napiszemy tutaj

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right) = g_1 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right) \tag{89}$$

i

$$H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = g_1 H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) + g_2 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right) H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_2\right). \tag{90}$$

Z metodyki zastosowanej w przedstawionej powyżej analizie wynika, że równania podobne do równań (89) i (90) można uzyskać dla $H_{I_{NG}}^{(3)}\left(f_1, f_2, f_3\right)$ (stosując w tym przypadku sygnał próbny $x(t)$, jak podano we wzorze (61), lecz tym razem nie z dwiema, ale z trzema eksponentami), oraz dla dalszych transmitancji nieliniowych dla nieliniowej przewodności *NG*. Podobne równania można też uzyskać dla pozostałych podstawowych elementów nieliniowych rozpatrywanych w literaturze [5], [9], [12], [14].

Zauważmy dalej, że równanie (89) można przepisać w następującej postaci:

$$H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right) \cdot 1 = g_1 H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right) \cdot 1 \ . \tag{91}$$

Następnie, korzystając ze znanych w teorii liniowej zależności, wiążących ze sobą transformaty Fouriera prądów i napięć (z wykorzystaniem transformat Fouriera odpowiedzi impulsowych układu, tj. z wykorzystaniem transmitancji prądowych, transmitancji napięciowych, mieszanych transmitancji: prądowo-napięciowych oraz napięciowo-prądowych), i transformat Fouriera źródeł niesterowanych, oraz wiedząc, że transformata Fouriera impulsu Diraca $\delta(t)$ (mogącego być w układzie napięciowym lub prądowym sygnałem pobudzającym) równa się jedynce, można równanie (91) przepisać w postaci

$$\hat{I}_{NG}^{(1)}\left(f_1\right) = g_1 \hat{V}_{NG}^{(1)}\left(f_1\right), \tag{92}$$

gdzie $\hat{I}_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ ($I_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ z daszkiem) oznacza transformatę Fouriera składowej prądu $i_{NG}^{(1)}$ ((składowej liniowej) prądu na nieliniowej przewodności *NG*). I podobnie, $\hat{V}_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ ($V_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ z daszkiem) oznacza transformatę Fouriera składowej napięcia $v_{NG}^{(1)}$ ((składowej liniowej) napięcia na nieliniowej przewodności *NG*). Wprowadzony w równaniu (92) symbol „daszka" nad transformatą prądu lub napięcia oznacza, że przedmiotowa transformata (prądu lub napięcia) odnosi się do zastosowania w układzie specyficznego pobudzenia w postaci impulsu Diraca.

Rozpatrując następnie równanie (90), widzimy, że występujące w nim po prawej stronie transmitancje $H_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ i $H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_2\right)$ są napięciami $\hat{V}_{NG}^{(1)}\left(f_1\right)$ i $\hat{V}_{NG}^{(1)}\left(f_2\right)$ otrzymanymi przy pobudzeniu układu (w którym występuje rozpatrywana przewodność *NG*) za pomocą impulsu Diraca $\delta\left(t\right)$. A zatem, mając to na uwadze i posiłkując się dodatkowo wynikami, jakie można otrzymać wykonując analizę podobną do tej, która pozwoliła otrzymać równanie (58), możemy powiedzieć, że prawdziwe są następujące równania:

$$\hat{I}_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) \tag{93}$$

i

$$\hat{V}_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right) = H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_1, f_2\right), \tag{94}$$

gdzie $\hat{I}_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ ($I_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ z daszkiem) oznacza dwuwymiarową transformatę Fouriera składowej prądu $i_{NG}^{(2)}$ ((składowej drugiego rzędu) prądu na nieliniowej przewodności *NG*), i podobnie, $\hat{V}_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ ($V_{NG}^{(2)}\left(f_1, f_2\right)$ z daszkiem) oznacza dwuwymiarową transformatę Fouriera składowej napięcia $v_{NG}^{(2)}$ ((składowej drugiego rzędu) napięcia na nieliniowej przewodności) – przy pobudzeniu wejścia układu impulsem Diraca.

Oczywiście, podobne zależności jak te wyrażone równaniami (93) i (94), można podać również dla transmitancji nieliniowych trzeciego rzędu: $H_{I_{NG}}^{(3)}\left(f_1, f_2, f_3\right)$ i $H_{V_{NG}}^{(3)}\left(f_1, f_2, f_3\right)$ oraz prądu i napięcia „z daszkiem": $\hat{I}_{NG}^{(3)}\left(f_1, f_2, f_3\right)$ i $\hat{V}_{NG}^{(3)}\left(f_1, f_2, f_3\right)$, tj. zależności istniejące pomiędzy wyżej wymienionymi wielkościami. Podobne zależności można także podać dla odpowiednich transmitancji i prądów oraz napięć „z daszkiem" wyższych rzędów dla nieliniowej przewodności NG, oraz dla pozostałych modeli podstawowych elementów nieliniowych rozpatrywanych w literaturze [5], [9], [12], [14].

W celu przejścia od wyprowadzonych przed chwilą zależności (89) i (90) do bardziej ogólnych zależności (75a) i (75b) [9], rozpatrzmy ponownie równanie (2b) i zastosujmy do niego wielowymiarową transformatę Fouriera zdefiniowaną wzorem (10). W wyniku otrzymamy

$$
\begin{aligned}
Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2k \text{ razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\cdot \\
&\cdot x\left(t_1-\tau_1\right)\cdots x\left(t_k-\tau_k\right)\exp\left(-j2\pi\left(f_1t_1+\cdots+f_kt_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k dt_1\cdots dt_k.
\end{aligned}
\tag{95}
$$

Wprowadzając następnie zmienne pomocnicze: $t_1^{'}=t_1-\tau_1,\ldots,t_k^{'}=t_k-\tau_k$ w równaniu (95), możemy je przepisać w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)= \\
&=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2k \text{ razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\cdot x\left(t_1^{'}\right)\cdots x\left(t_k^{'}\right)\exp\left(-j2\pi\left(f_1t_1^{'}+\cdots+f_kt_k^{'}\right)\right)\cdot \\
&\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+\cdots+f_k\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k dt_1^{'}\cdots dt_k^{'}= \\
&=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k \text{ razy}} \Big(h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+\cdots+f_k\tau_k\right)\right)\cdot \\
&\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t_1^{'}\right)\exp\left(-j2\pi f_1t_1^{'}\right)dt_1^{'}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t_k^{'}\right)\exp\left(-j2\pi f_kt_k^{'}\right)dt_k^{'}\Big)d\tau_1\cdots d\tau_k.
\end{aligned}
\tag{96}
$$

Korzystając z faktu, że wyrażenia

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t_1^{'}\right)\exp\left(-j2\pi f_1t_1^{'}\right)dt_1^{'}=X\left(f_1\right),
\tag{97}
$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t_k^{'}\right)\exp\left(-j2\pi f_k t_k^{'}\right)dt_k^{'} = X\left(f_k\right), \tag{98}$$

występujące w równaniu (96), są jednowymiarowymi transformatami Fouriera sygnału wejściowego $x\left(t\right)$, możemy równanie (96) przepisać jak pokazano poniżej

$$\begin{gathered} Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) = X\left(f_1\right)\cdots X\left(f_k\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k \text{ razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\cdot \\ \cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+\cdots+f_k\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k. \end{gathered} \tag{99}$$

Przy wykorzystaniu wzoru (10) w równaniu (99) mamy

$$\begin{gathered} Y^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) = X\left(f_1\right)\cdots X\left(f_k\right)H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) = \\ = H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)X\left(f_1\right)\cdots X\left(f_k\right), \end{gathered} \tag{100}$$

gdzie $H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)$ oznacza *k*-wymiarową transmitancję nieliniową (*k*-wymiarową transformatę Fouriera nieliniowej odpowiedzi impulsowej rzędu *k*, $h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)$).

Korzystając z wyprowadzonej zależności (100) w odniesieniu do transmitancji nieliniowych związanych z rozpatrywaną nieliniową przewodnością *NG*, możemy napisać

$$I_{NG}^{(1)}\left(f_1\right) = H_{I_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right)X\left(f_1\right), \tag{101a}$$

$$I_{NG}^{(2)}\left(f_1,f_2\right) = H_{I_{NG}}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)X\left(f_1\right)X\left(f_2\right), \tag{101b}$$

$$I_{NG}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right) = H_{I_{NG}}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)X\left(f_1\right)X\left(f_2\right)X\left(f_3\right), \tag{101c}$$

itd.; oraz

$$V_{NG}^{(1)}\left(f_1\right) = H_{V_{NG}}^{(1)}\left(f_1\right)X\left(f_1\right), \tag{102a}$$

$$V_{NG}^{(2)}\left(f_1,f_2\right) = H_{V_{NG}}^{(2)}\left(f_1,f_2\right)X\left(f_1\right)X\left(f_2\right), \tag{102b}$$

$$V_{NG}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right) = H_{V_{NG}}^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)X\left(f_1\right)X\left(f_2\right)X\left(f_3\right), \tag{102c}$$

itd.

Mnożąc obydwie strony równania (89) przez $X(f_1)$ i równania (90) przez $X(f_1)X(f_2)$, możemy powyższe równania przepisać w postaci:

$$H_{I_{NG}}^{(1)}(f_1)X(f_1)=g_1H_{V_{NG}}^{(1)}(f_1)X(f_1) \tag{103}$$

i

$$\begin{aligned}&H_{I_{NG}}^{(2)}(f_1,f_2)X(f_1)X(f_2)=\\&=g_1H_{V_{NG}}^{(2)}(f_1,f_2)X(f_1)X(f_2)+g_2H_{V_{NG}}^{(1)}(f_1)X(f_1)H_{V_{NG}}^{(1)}(f_2)X(f_2).\end{aligned} \tag{104}$$

Korzystając następnie w (103) i (104) z wyprowadzonych powyżej zależności (101a), (101b), (102a) i (102b), mamy

$$I_{NG}^{(1)}(f_1)=g_1V_{NG}^{(1)}(f_1) \tag{105}$$

i

$$I_{NG}^{(2)}(f_1,f_2)=g_1V_{NG}^{(2)}(f_1,f_2)+g_2V_{NG}^{(1)}(f_1)V_{NG}^{(1)}(f_2). \tag{106}$$

Zależności (105) i (106) są identyczne z odpowiadającymi im zależnościami (75a) i (75b).

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że w podobny sposób można wykazać poprawność równania (75c) i dalszych równań dla nieliniowej przewodności *NG*, oraz wykazać poprawność odpowiednich równań dla innych modeli podstawowych elementów nieliniowych rozpatrywanych w literaturze [5], [9], [12], [14]. Kończy to naszkicowany dowód poprawności wzorów i zależności, które otrzymuje się w metodzie opartej na konsekwentnym prowadzeniu wyprowadzeń w dziedzinie częstotliwości. W dowodzie tym nie korzysta się z takich wyrażeń, które prowadzą do wystąpienia iloczynów impulsów Diraca.

4 Wielowymiarowy splot nieliniowej odpowiedzi impulsowej z sygnałem wejściowym w postaci impulsu Diraca

Jak już szczegółowo wyjaśniono w poprzednim rozdziale, wyjaśniając wątpliwości związane z interpretacją algorytmu obliczeń transmitancji nieliniowych (patrz wzory (54-58)), metoda posiłkująca się sygnałem wejściowym w postaci impulsu Diraca, $\delta(t)$, okazuje się być również naturalną metodą dla obliczeń transmitancji nieliniowych. Jedynym problemem, jaki pojawia się w tym przypadku, to występowanie iloczynów impulsów Diraca, przy sformułowaniu w dziedzinie czasu powyższego zadania, tj. obliczeń transmitancji nieliniowych.

Rozwiązanie problemu polega zaś na znalezieniu alternatywnego zapisu, w którym te iloczyny nie występują, a nie występują one w tym przypadku, gdy operujemy zależnościami w dziedzinie częstotliwości. Pokazują to wzory (54-58).

W poprzednim rozdziale pokazano, że korzystając ze znanej z literatury [12], [13] metody z harmonicznym sygnałem próbnym jako sygnałem przykładanym do wejścia analizowanego układu nieliniowego, otrzymuje się takie same zależności jak w metodzie w pełni częstotliwościowej [9] z sygnałem wejściowym w postaci impulsu Diraca. Stanowi to alternatywny dowód poprawności takich wzorów jak wzory (54-58).

Metoda z harmonicznym sygnałem próbnym [12], [13] została zastosowana w pracy [2] do obliczenia transmitancji nieliniowych modelu filtru aktywnego uwzględniającego nieliniowy reżim pracy wzmacniacza operacyjnego w zakresie częstotliwości, w którym występuje nieliniowość typu *slew-rate* [1], [3], [4]. Natomiast w pracy [9] zastosowano do tych samych obliczeń inną metodę, polegającą na pobudzeniu wejścia filtru aktywnego sygnałem w postaci impulsu Diraca. W tej metodzie wyjściowy zapis to zapis w dziedzinie czasu równań opisujących model filtru, z którego po zastosowaniu rozwinięć w szereg Volterry i wielowymiarowych przekształceń Fouriera otrzymuje się transmitancje nieliniowe.

W zapisie w dziedzinie czasu równań dla nieliniowego modelu filtru przy pobudzeniu jego wejścia impulsem Diraca w sposób naturalny pojawiają się wyrażenia typu $h^{(k)} = h^{(k)} * \delta^k$ [9], gdzie, zgodnie ze sposobem zapisu podanym w (2c), $h^{(k)}$ jest nieliniową odpowiedzią impulsową filtru rzędu *k*, a $x(t) = \delta(t)$ jest przyłożonym sygnałem wejśiowym. Symbol $*$ natomiast reprezentuje wielowymiarowy splot rzędu *k*.

W zależnościach $h^{(k)} = h^{(k)} * \delta^k$ występują iloczyny impulsów Diraca, a więc można mieć wątpliwości, co do ich poprawności. Pokażemy w wyprowadzeniach zamieszczonych poniżej, że te zależności są poprawne, gdyż można je przedstawić w alternatywnej postaci, w której nie występują takie iloczyny.

Aby wykazać poprawność zapisu $h^{(k)} = h^{(k)} * \delta^k$, zaczniemy od napisania tego wzoru explicite, tj. w postaci

$$h^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\delta\left(t_1-\tau_1\right)\cdots\delta\left(t_k-\tau_k\right)d\tau_1\cdots d\tau_k \leftarrow$$

$$\updownarrow^{t_1}_{\tau_1} \qquad \updownarrow^{t_k}_{\tau_k}$$

$$h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\delta\left(t-\tau_1\right)\cdots\delta\left(t-\tau_k\right)d\tau_1\cdots d\tau_k = h^{(k)}\left(t,\ldots,t\right),$$

$$\underset{\to}{\overset{\leftarrow}{t_1}}\ t\cdots\underset{\to}{\overset{\leftarrow}{t_k}}\ t$$

(107)

zgodnie z zależnością definicyjną (2c).

We wzorze (107) występują iloczyny impulsów Diraca, ale pokażemy, że można je zapisać w alternatywnej postaci. W tym celu weźmiemy pod uwagę równanie (2b).

Korzystając z reprezentacji w dziedzinie częstotliwości, tj. wykorzystując przekształcenie odwrotne Fouriera dane wzorem (22), przy $k=1$, możemy przedstawić impuls Diraca $\delta(t)$ w następującej postaci:

$$\delta\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\exp\left(j2\pi ft\right)df = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi ft\right)df. \tag{108}$$

Podstawiając następnie $x\left(t\right)=\delta\left(t\right)$ we wzorze (2b), otrzymujemy

$$y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} \left(h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi f_1\left(t_1-\tau_1\right)\right)df_1\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi f_k\left(t_k-\tau_k\right)\right)df_k\right)d\tau_1\cdots d\tau_k = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}}\left(\exp\left(j2\pi\left(f_1t_1+\cdots+f_kt_k\right)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+\cdots+f_k\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k\right)df_1\cdots df_k =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)\exp\left(j2\pi\left(f_1t_1+\cdots+f_kt_k\right)\right)df_1\cdots df_k,$$

(109)

gdyż

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+\cdots+f_k\tau_k\right)\right)d\tau_1\cdots d\tau_k = \\ = H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right) \tag{110}$$

jest k-wymiarową transformatą Fouriera nieliniowej odpowiedzi impulsowej $h^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)$ - zgodnie ze wzorem (10).

Z kolei

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k\ \text{razy}} H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)\exp\left(j2\pi\left(f_1t_1+\cdots+f_kt_k\right)\right)df_1\cdots df_k = \\ = h^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) \tag{111}$$

przedstawia sobą, zgodnie ze wzorem (22), odwrotną k-wymiarową transformatę Fouriera $H^{(k)}\left(f_1,\ldots,f_k\right)$. A zatem, uwzględniając (111) w (109), możemy napisać

$$y^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) = h^{(k)}\left(t_1,\ldots,t_k\right) = h^{(k)} * \left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi ft\right)df\right)^k, \tag{112}$$

co dowodzi poprawności zapisu $h^{(k)} * \left(\delta\left(t\right)\right)^k$.

5 Iloczyny impulsów diraca w modelu oscylatora drgań prawie sinusoidalnych

Szereg Volterry został wykorzystany w wielu pracach [6], [7], [8], [15], [17], [18] jako narzędzie do analizy oscylatorów drgań prawie sinusoidalnych. W pracach [6], [9] dokonano szczegółowej analizy stabilności amplitudy i częstotliwości drgań prostego oscylatora drgań prawie sinusoidalnych z mostkiem Wiena, pokazanego na rys. 2. W tej analizie wykorzystano opis oscylatora w postaci tzw. równania stanowiącego [15], bazującego na szeregu Volterry. Ponadto założono, że wzmacniacz z rys. 2 został zrealizowany za pomocą nieliniowego źródła napięciowego sterowanego napięciem (NZNSN), które jest opisane wielomianem piątego stopnia zawierającym tylko nieparzyste potegi, tj.

$$v_o \;=\; k_1 v_i \;+\; k_3 v_i^3 \;+\; k_5 v_i^5 \;, \tag{113}$$

gdzie v_o oznacza napięcie na wyjściu, natomiast v_i na wejściu wzmacniacza.

W pracach [6], [9] w celu wyznaczenia nieliniowych transmitancji NZNSN przepisano równanie (113) w następującej postaci:

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1\delta(\tau_1)v_i(t-\tau_1)d\tau_1 + \int\int_{-\infty}^{\infty}\int k_3\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3)\cdot$$
$$\cdot\prod_{n=1}^{3} v_i(t-\tau_n)d\tau_n + \iint\int_{-\infty}^{\infty}\iint k_5\delta(\tau_1)....\delta(\tau_5)\prod_{n=1}^{5} v_i(t-\tau_n)d\tau_n \quad . \tag{114}$$

Z zależności (114) wynika, że nieliniowe odpowiedzi impulsowe NZNSN wyrażają się wzorami

$$f^{(1)}(\tau_1) = k_1\delta(\tau_1) \;, \tag{115a}$$

$$f^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = 0 \;, \tag{115b}$$

$$f^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = k_3\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3) \;, \tag{115c}$$

$$f^{(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 0 \;, \tag{115d}$$

$$f^{(5)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = k_5\prod_{n=1}^{5}\delta(\tau_n) \;, \tag{115e}$$

$$f^{(k)}(\tau_1,...., \tau_k) = 0 \text{ dla } k > 5 \;. \tag{115f}$$

Stosując wielowymiarowe przekształcenie Fouriera (10) do równań (115), otrzymuje się

$$F^{(1)}(f) = k_1 \tag{116a}$$

$$F^{(2)}(f_1, f_2) = 0 \;, \tag{116b}$$

$$F^{(3)}(f_1, f_2, f_3) = k_3 \;, \tag{116c}$$

$$F^{(4)}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0 \tag{116d}$$

$$F^{(5)}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = k_5 \;, \tag{116e}$$

$$F^{(k)}(f_1,....,f_k)=0,\ k>5\ , \tag{116f}$$

gdzie $F^{(1)},....,F^{(k)}$ oznaczają nieliniowe transmitancje NZNSN (wzmacniacza z rys. 2).

Można mieć wątpliwości co do poprawności wzorów (115) z powodu występujących w nich iloczynów impulsów Diraca. Teoria matematyczna przedstawiona w pracach [10], [16], [22] pokazuje jednakże, że można używać tych iloczynów w sensie tutaj użytym. W takim sensie użyto iloczynów impulsów Diraca również w pracy [24], w celu wyrażenia nieliniowych odpowiedzi układu opisanego szeregiem potęgowym.

W wyprowadzeniach przedstawionych poniżej pokażemy, że zależności (114) i (115) można przedstawić w alternatywnych postaciach, w których nie występują iloczyny impulsów Diraca. W tym celu wykorzystamy wzór (108) w zależności (114), otrzymując

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_1\tau_1)\,d\eta_1 v_i(t-\tau_1)\,d\tau_1 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_1\tau_1)\,d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_2\tau_2)\,d\eta_2 \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_3\tau_3)\,d\eta_3 v_i(t-\tau_1) v_i(t-\tau_2) v_i(t-\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_5 \prod_{i=1}^{5}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_i\tau_i)\,d\eta_i \cdot v_i(t-\tau_i)\right) d\tau_1 \cdots d\tau_5 \ . \end{aligned} \tag{117}$$

Z zależności (117) wynika, że nieliniowe odpowiedzi impulsowe wyrażone równaniami (115a-f) można przedstawić w następujący, alternatywny sposób:

$$f^{(1)}(\tau_1) = k_1\delta(\tau_1) = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_1\tau_1)\,d\eta_1, \tag{118a}$$

$$f^{(2)}(\tau_1,\tau_2) = 0, \tag{118b}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_1\tau_1)\,d\eta_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_2\tau_2)\,d\eta_2 \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\eta_3\tau_3)\,d\eta_3, \end{aligned} \tag{118c}$$

$$f^{(4)}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\right)=0, \tag{118d}$$

$$f^{(5)}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5\right)=k_5\prod_{i=1}^{5}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi\eta_i\tau_i\right)d\eta_i\right), \tag{118e}$$

$$f^{(k)}\left(\tau_1,\ldots,\tau_k\right)=0 \text{ dla } k>5. \tag{118f}$$

Przy wykorzystaniu równań (118a-f) otrzymuje się transmitancje nieliniowe $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)},\ldots$, jak pokazano poniżej

$$\begin{aligned}F^{(1)}\left(f\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}k_1\delta\left(\tau_1\right)\exp\left(-j2\pi f\tau_1\right)d\tau_1=\\&=k_1\exp\left(-j2\pi f\cdot 0\right)=k_1,\end{aligned} \tag{119a}$$

$$\begin{aligned}F^{(2)}\left(f_1,f_2\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}0\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+f_2\tau_2\right)\right)d\tau_1d\tau_2=\\&=0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+f_2\tau_2\right)\right)d\tau_1d\tau_2=0,\end{aligned} \tag{119b}$$

$$\begin{aligned}&F^{(3)}\left(f_1,f_2,f_3\right)=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_3\prod_{i=1}^{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi\eta_i\tau_i\right)d\eta_i\right)\cdot\\&\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_1\tau_1+f_2\tau_2+f_3\tau_3\right)\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3=\\&=k_3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=2}^{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi\eta_i\tau_i\right)d\eta_i\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau_1\right)\exp\left(-j2\pi f_1\tau_1\right)d\tau_1\cdot\right.\\&\left.\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_2\tau_2+f_3\tau_3\right)\right)\right)d\tau_2d\tau_3=\\&=k_3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=2}^{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi\eta_i\tau_i\right)d\eta_i\right)\cdot 1\cdot\exp\left(-j2\pi\left(f_2\tau_2+f_3\tau_3\right)\right)\right)d\tau_2d\tau_3=\\&=k_3\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi\eta_3\tau_3\right)d\eta_3\right)\cdot\end{aligned}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_2) \exp(-j2\pi f_2 \tau_2) d\tau_2 \cdot \exp(-j2\pi f_3 \tau_3) d\tau_3 =$$

$$= k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi \eta_3 \tau_3) d\eta_3 \right) \cdot 1 \cdot \exp(-j2\pi f_3 \tau_3) d\tau_3 = \qquad (119c)$$

$$= k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_3) \exp(-j2\pi f_3 \tau_3) d\tau_3 = k_3.$$

Wzór na transmitancję $F^{(4)}$ otrzymuje się w podobny sposób jak to pokazano przy wyprowadzeniu wzoru (119b), natomiast wzór na $F^{(5)}$ w podobny sposób, w jaki otrzymano wzór (119c).

6 Podsumowanie

W pracy wyjaśniono wiele problemów i teoretycznych niejasności występujących w metodzie analizy nieliniowych układów elektronicznych przy pomocy szeregu Volterry. W szczególności pokazano, że modele podstawowych elementów nieliniowych wyprowadzone w dziedzinie częstotliwości dla analizy nieliniowej za pomocą zmodyfikowanej macierzy admitancyjnej [9] są identyczne z modelami, jakie wyprowadza się przy wykorzystaniu metody z tzw. sygnałem próbnym [12]. Pokazano również, że wzory i równania, które uzyskuje się przy zastosowaniu metody pobudzenia wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca i prowadzenia wyprowadzeń konsekwentnie w dziedzinie częstotliwości, otrzymuje się w identycznej postaci przy zastosowaniu metody opracowanej przez Bussganga i współpracowników [12].

Podejście polegające na pobudzeniu wejścia układu nieliniowego impulsem Diraca prowadzi w wyprowadzeniach do pojawienia się iloczynów impulsów Diraca. Mimo to jest ono poprawne, gdyż można je uzasadnić matematycznie [10], [16], [22].

Literatura

[1] P. E. Allen: A model for slew-induced distortion in single-amplifier active filters. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1978, vol. CAS-25, pp. 565-572

[2] A. Borys: Effect of op amp output resistance on intermodulation distortion of single amplifier filters. Proceedings of the ECCT&D'81, The Hague (The Netherlands), 1981, pp. 988-992

[3] A. Borys: An analysis of slew-induced distortion in single-amplifier active filters using the Volterra-Wiener series technique. Int. J. Cir. Theor. Appl., 1982, vol. 10, pp. 81-94

[4] A. Borys A.: Slew-induced distortion of single-amplifier active filters using the gain-sensitivity product concept. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1984, vol. CAS-31, pp. 306-308

[5] A. Borys: A simplified analysis of nonlinear distortion in analog electronic circuits using the Volterra-Wiener series. Scientia Electrica, 1984, vol. 30, no. 3, pp. 78-103

[6] A. Borys: Elementary deterministic theories of frequency and amplitude stability in feedback oscillators. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1987, vol. CAS-34, pp. 254-258

[7] A. Borys A.: Harmonic distortion in nearly sinusoidal oscillators. European Transactions on Telecommunications and Related Technologies (ETT), 1990, vol. 1, pp. 459-464

[8] A. Borys: Sinusoidal oscillators with slew-rate type nonlinearity. European Transactions on Telecommunications and Related Technologies (ETT), 1991, vol. 2, pp. 447-451

[9] A. Borys: Wybrane zagadnienia analizy nieliniowych, analogowych układów elektronicznych z wykorzystaniem szeregu Volterry. Bydgoszcz, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, 1996

[10] Boyd S., Chua L. O., and Desoer C. A.: "Analytical foundations of Volterra series". IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 1, 1984, pp. 243-282

[11] S. Boyd, L. O. Chua: Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1985, vol. CAS-32, pp. 1150-1161

[12] J. J. Bussgang, L. Ehrman, J. W. Graham: Analysis of nonlinear systems with multiple inputs. Proceedings of the IEEE, 1974, vol. 62, pp. 1088-1119

[13] L. O. Chua, C.-Y. Ng: Frequency domain analysis of nonlinear systems: general theory. IEE J. Electron. Circuits and Systems, 1979, vol. 3, pp. 165-185

[14] L. O. Chua, C.-Y. Ng: Frequency domain analysis of nonlinear systems: formulation of transfer functions. IEE J. Electron. Circuits and Systems, 1979, vol. 3, pp. 257-269

[15] L. O. Chua, Y.-S. Tang: Nonlinear oscillation via Volterra series. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1982, vol. CAS-29, pp. 150-168

[16] E. G. Gilbert: Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. IEEE Trans. on Automatic Control, 1977, vol. AC-22, no. 6, pp. 909- 921

[17] S. Ichikawa, Y. Shyakuda: Steady state analysis of oscillatory circuits with harmonic components by Volterra series, Electronics and Communications in Japan, Part 1, 1986, vol. 69, no. 1, pp. 56-64

[18] Y. L. Kuo: Frequency-domain analysis of weakly nonlinear networks. "Canned" Volterra analysis, part 2. IEEE Circuits and Systems Magazine, 1977, vol. 11, pp. 2-6

[19] R. G. Meyer, M. J. Shensa, R. Eschenbach: Crossmodulation and intermodulation in amplifiers at high frequencies. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1972, vol. SC-7, no. 1, pp. 16-23

[20] S. Narayanan: Intermodulation distortion of cascaded transistors. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1969, vol. SC-4, no. 3, pp. 97-106

[21] S. Narayanan: Application of Volterra series to intermodulation distortion analysis of a transistor feedback amplifier. IEEE Trans. Circuit Theory, 1970, vol. CT-17, pp. 518-527

[22] K. A. Pupkov, V. I. Kapalin, A. S. Yuscenko: Functional Series in the Theory of Nonlinear Systems. Moskwa, Nauka, 1986 (w jęz. rosyjskim)

[23] J. Roszkiewicz, A. Borys: Małosygnałowa komputerowa analiza nieliniowa układów analogowych. Część II. Algorytmy analizy i programu MAN. Rozpr. Elektrotech., 1979, z. 1

[24] 24. J. Roszkiewicz, A. Borys: Małosygnałowa komputerowa analiza nieliniowa układów analogowych. Część I. Podstawy analizy, Rozpr. Elektrotech., 1979, z. 1

[25] I. W. Sandberg: A perspective on system theory. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1984, vol. 31, no. 1, pp. 88-103

[26] M. Schetzen: The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. New York, John Wiley & Sons, 1980

[27] M. Schetzen: Nonlinear system modeling based on the Wiener theory, Proc. IEEE, 1981, vol. 69, pp. 1557-1573

[28] N. Wiener: Response of a non-linear device to noise. MIT Radiation Laboratory Rep. 129, April 1942

[29] A. Gelb, W. E. Vander Velde: Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design. New York, McGraw-Hill, 1968

EXPLANATION OF PROBLEMS OCCURRING IN THE ANALYSIS OF NONLINEAR CIRCUITS WITH THE USE OF VOLTERRA SERIES

Summary - This paper is devoted to the explanation of problems occurring in the analysis of nonlinear circuits with the use of Volterra series. Among others, it has been shown here that the models of basic elements of nonlinear circuits, which are derived in the modified admittance matrix method for nonlinear circuits, have the same form as those derived with the use of the admittance matrix and the so-called probing signal. The problem of occurrence of Dirac impulse products in different kinds of analyses performed with the use of Volterra series has been addressed as well. It has been shown that such the analyses can be always put into equivalent forms, avoiding occurrence of Dirac impulse products, what proves their correctness.