

**Marcin Hatłas, Witold Beluch**  
Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej  
Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice  
email: marcin.hatlas91@gmail.com, witold.beluch@polsl.pl

## **MODELOWANIE WIELOSKALOWE GRADIENTOWYCH KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH**

**Streszczenie** – W pracy przedstawiono metodę modelowania wieloskalowego materiałów gradientowych na przykładzie kompozytu włóknistego o zmiennej średnicy włókna. Celem modelowania było wyznaczenie makroskopowych własności materiałowych określających zmiany w materiale gradientowym. Obliczenia wykonano w oparciu o analizę naprężeń z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) oraz homogenizacji numerycznej.

**Słowa kluczowe:** modelowanie wieloskalowe, homogenizacja numeryczna, materiały gradientowe, kompozyty włókniste, metoda elementów skończonych

### **1 Wstęp**

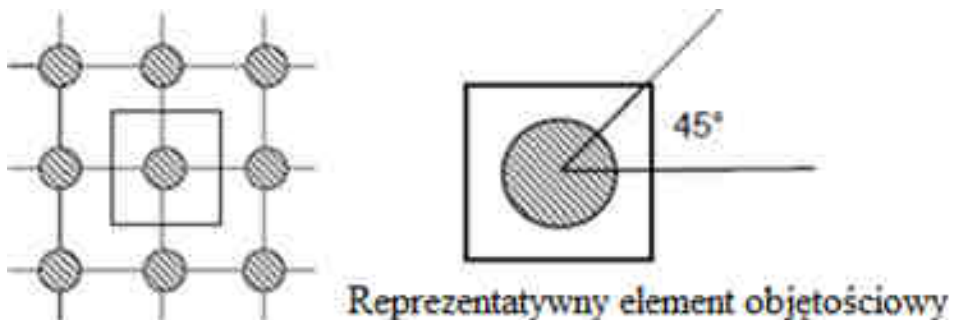
W związku z coraz większym zapotrzebowaniem przemysłu na materiały o specyficznych właściwościach, następuje szybki rozwój inżynierii materiałowej. Aktualnie głównymi kierunkami rozwoju tej nauki są m. in. nowoczesne stopy metali, materiały porowate, kompozyty oraz materiały gradientowe. W każdym z tych przypadków mikroskopowe składniki tych materiałów powodują ich charakterystyczne własności makroskopowe. Materiały gradientowe różnią się od pozostałych wymienionych materiałów tym, że ich własności zmieniają się wzdłuż struktury materiału. Dzięki temu materiały te mogą jeszcze dokładniej spełniać warunki stawiane przez współczesny przemysł.

Celem pracy było wyznaczenie makroskopowych własności materiału gradientowego w postaci belki wykonanej z kompozytu włóknistego ze wzmocnieniem o zmiennej średnicy. Obliczenia zostały wykonane w oparciu o metody modelowania wieloskalowego oraz homogenizacji numerycznej.

Analizowanym materiałem był kompozyt włóknisty - kompozyt składający się ze wzmocnienia w postaci charakterystycznie ułożonych włó-

kien znajdujących się w osnowie. W przypadku takich kompozytów włókna są podstawowym elementem nośnym, a osnowa służy jako spoiwo zapewniając rozkład obciążeń na włókna kompozytu [1]. Zwykle kompozyty włókniste wykonywane są z użyciem włókien o stałej średnicy, zapewniając stałe własności makroskopowe, jednakże do specjalistycznych zastosowań możliwe jest wykonanie włókien o zmiennej średnicy i utworzenie na ich podstawie materiału gradientowego. Fizycznie włókna węglowe o zmiennych średnicach włókien są wykonywane metodami karbonizacji włókien organicznych, choć są rzadko stosowanym wzmocnieniem, ze względu na fakt wysokich kosztów i trudności wykonania [2].

Aby wyznaczyć zastępcze własności materiałowe, w postaci macierzy sztywności, należy zbadać zachowanie się mikrostruktury materiału pod wpływem makroskopowych obciążeń. Do tego celu wykorzystuje się tzw. reprezentatywny element objętościowy (Representative Volume Element – RVE). Jest on statystyczną reprezentacją swojego otoczenia, na której podstawie można wnioskować o całej strukturze materiałowej obiektu [3]. Widok kompozytu włóknistego wraz z odwzorowującym jego mikrostrukturę RVE przedstawia rysunek 1.



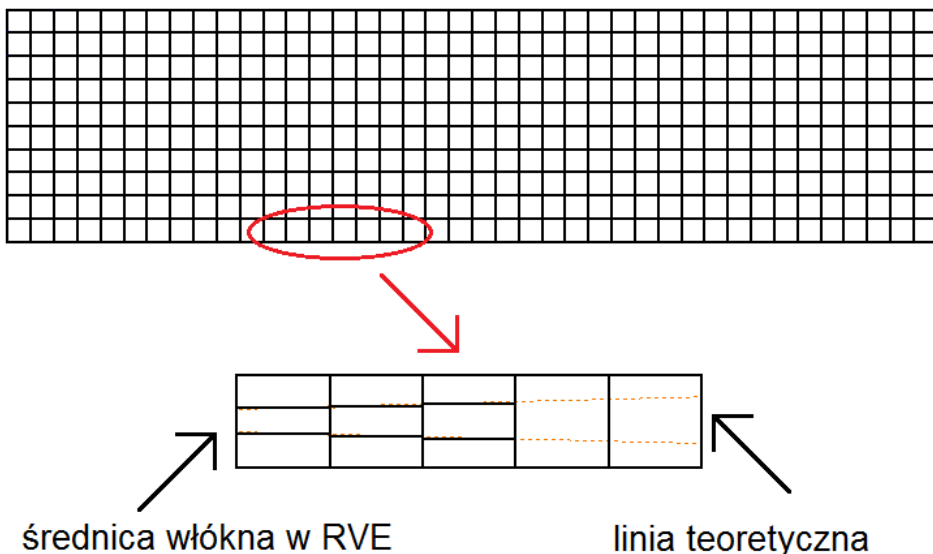
Rys. 1. Układ kompozytu włóknistego oraz RVE.

Zakładając nieznaną postać macierzy sztywności oraz wykorzystując trójwymiarową postać RVE należy wykonać sześć testów nakładając na RVE odkształcenia: normalne i styczne, związane z głównymi osiami współrzędnych. Każda z analiz RVE była przeprowadzana z zastosowaniem komercyjnego pakietu oprogramowania metody elementów skończonych MSC Patran/Nastran [4].

Wynikiem analizy są naprężenia powstałe w RVE, na podstawie których możliwe jest wyznaczenie zależności między naprężeniami i odkształceniami, czyli zastępczą macierz sztywności. Powyższą procedurę nazywa się homogenizacją numeryczną [5].

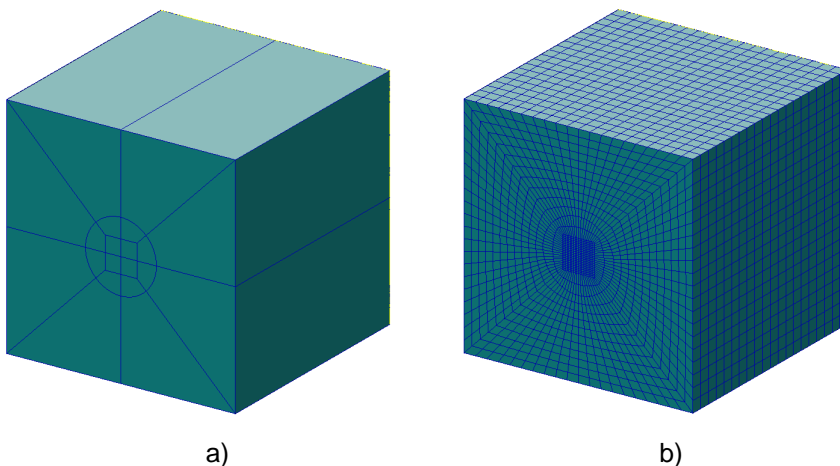
## 2 Modelowanie materiału gradientowego

W celu analizy materiału gradientowego został wykorzystany kompozyt włóknisty, składający się z osnowy w postaci żywicy epoksydowej oraz wzmocnienia w postaci włókna węglowego o liniowej zmianie średnicy. Założono, że średnica włókna może zmieniać się w przedziale od 6 do 14  $\mu\text{m}$ . W celu wykorzystania homogenizacji numerycznej, która zakłada, że materiał nie zmienia się w pewnym otoczeniu RVE, należało podzielić materiał gradientowy na przedziały. W każdym przedziale aproksymowano średnicę włókna i założono, że jest ona niezmienna w całym przedziale. Założono podział na 20 przedziałów, co oznacza, że procedurę homogenizacji należy wykonać 20 razy. Rysunek 2 przedstawia podział materiału gradientowego. W celu automatyzacji procesu homogenizacji dla różnych udziałów objętościowych włókna zostały napisane dwa sterujące programy komputerowe. Pierwszy z nich był skryptem działającym w środowisku Matlab, który zarządzał zmianą parametrów RVE dla danej iteracji obliczeń oraz wyznaczał stałe materiałowe na podstawie obliczeń MES. Drugi z nich był skryptem sterującym sesją programu Patran. Skrypt ten na podstawie danych generowanych przez pierwszy skrypt, generował geometrię, siatkę elementów skończonych oraz warunki brzegowe, a następnie uruchamiał obliczenia MES.



Rys. 2. Podział materiału gradientowego na RVE oraz aproksymacja średnicy włókna.

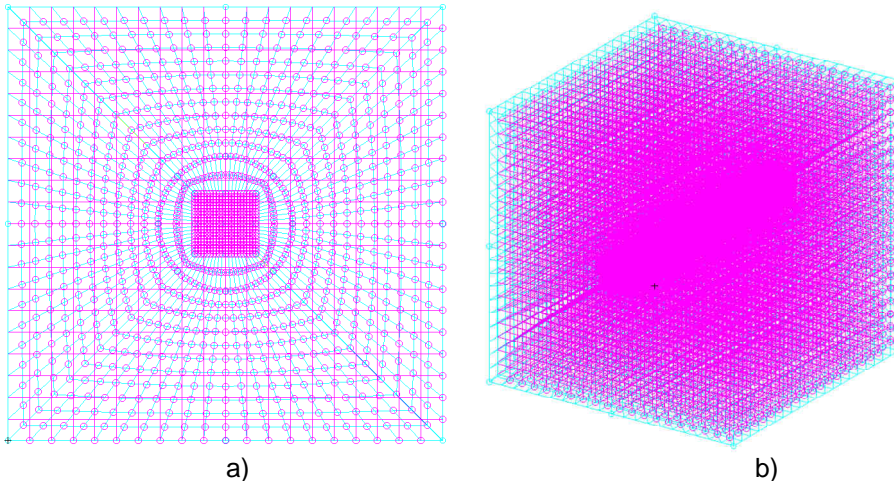
Do modelowania geometrii wykorzystywany był fragment drugiego z wyżej omawianych skryptów. Na podstawie wymiarów RVE otrzymywanych z skryptu 1 dla wszystkich aproksymowanych RVE w materiale gradientowym, generowana była nowa geometria przedstawiająca RVE wraz z włóknem o zadanej dla danego przedziału średnicy. Geometria była generowana na podstawie wbudowanych funkcji programu Patran z wykorzystaniem wbudowanego języka programowania – Patran Command Language (PCL). Składnia funkcji PCL jest relatywnie skomplikowana ze względu na dużą liczbę różnorodnych parametrów, na podstawie których wykonywane są określone działania programu. Z tego powodu najczęściej stosowanym podejściem jest nagrywanie tzw. pliku sesyjnego programu w trakcie generowania prostej geometrii, a następnie wprowadzanie własnych zmiennych lub równań do już wygenerowanych funkcji. W podobny sposób została wygenerowana siatka elementów skończonych, nałożone warunki brzegowe związane w odebraniem stopni swobody na krawędziach RVE oraz odkształcenia spowodowane makroskopowymi obciążeniami. Geometrię oraz siatkę elementów skończonych utworzone na podstawie skryptu 2 przedstawia rysunek 3.



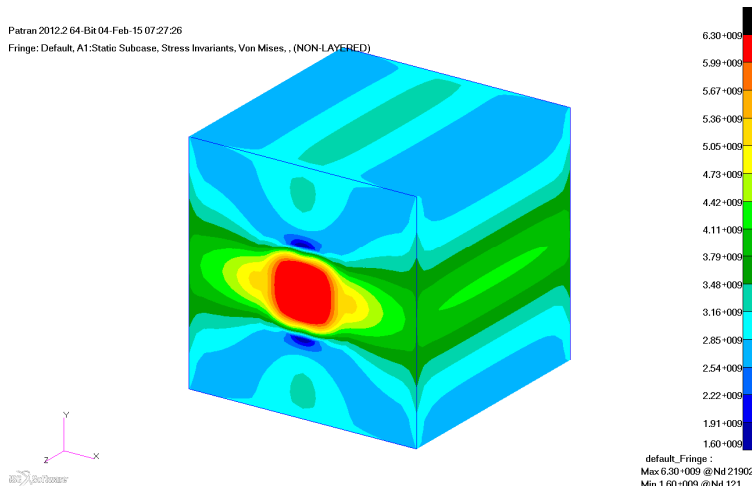
Rys. 3. Model RVE utworzony za pomocą skryptu 2: a) geometria, b) siatka elementów skończonych

W celu przeprowadzenia procedury numerycznej homogenizacji z wykorzystaniem metody elementów skończonych należy zadać tzw. periodyczne warunki brzegowe. Warunki te są związane z założeniem, że wokół analizowanego RVE występują dokładnie takie same RVE. Warunki te cechują się periodycznością przemieszczeń oraz aperiodycznością sił brzegowych [6]. Periodyczne warunki brzegowe muszą być zadane na węzłach leżących na przeciwległych ścianach RVE. Aby było możliwe utworzenie periodycznych warunków brzegowych dla do-

wolnego modelu generowanego przez poprzednie części skryptu konieczne było utworzenie w nim odpowiedniej instrukcji warunkowej. Instrukcja wykorzystywała funkcje języka PCL do uzyskania informacji o położeniu węzłów siatki oraz pętłę, w trakcie której poszukiwane były węzły znajdujące się na przeciwległych ścianach RVE. Jeżeli instrukcja znalazła odpowiadające sobie węzły łączyła je periodycznym warunkiem brzegowym za pomocą wbudowanej funkcji języka PCL. Periodyczne warunki brzegowe wygenerowane przez skrypt 2 przedstawia rysunek 4.

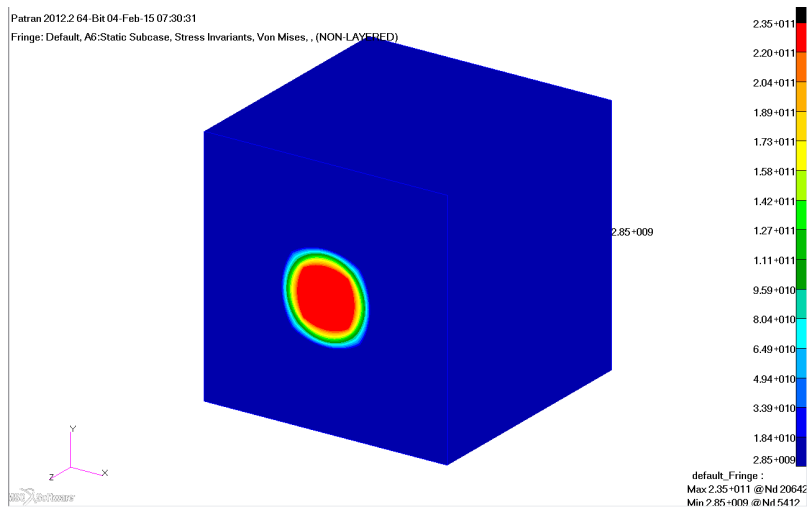


Rys. 4. Periodyczne warunki brzegowe: a) widok na płaszczyźnie xy, b) widok przestrzenny



Rys. 5. Rozkład naprężeń zredukowanych von Mises'a [Pa] - zadane odkształcenie w osi x

Ostatnim fragmentem drugiego skryptu jest część wykonująca sześć analiz numerycznych w celu wyznaczenia naprężeń w punktach Gaussa elementów skończonych RVE. Dane wynikowe były zapisywane w postaci plików tekstowych, które mogły być dalej wykorzystywane. Rozkład naprężeń redukowanych von Mises'a na obszarze RVE po zadaniu odkształceń jednostkowych w osi x oraz z przedstawiają rysunki 5 i 6.



Rys. 6. Rozkład naprężeń redukowanych von Mises'a [Pa] - zadane odkształcenie w osi z

### 3 Homogenizacja numeryczna

Procedura homogenizacji numerycznej była przeprowadzana w skrypcie 1. Za pomocą funkcji programu Matlab wczytane zostały pliki tekstowe z wynikami analiz numerycznych. Ze względu na bardzo dużą dyskretyzację obszaru RVE oraz potrzebę zmniejszenia czasu obliczeń założono, że nie jest konieczne wykonywanie całkowania naprężeń w obszarze danego elementu skończonego [7]. Zamiast tego wartości zastępczej macierzy sztywności obliczono na podstawie wartości naprężeń w punktach środków geometrycznych elementów skończonych. Na podstawie otrzymanych wartości macierzy sztywności można wysnuć wniosek o tym, że modelowany materiał wykazuje własności ortotropowe. Przyjmując taki model materiału wyznaczono zastępcze stałe materiałowe dla kolejnych przedziałów materiału gradientowego. Wyniki homogenizacji zebrano w tabeli 1.

Tabela. 1. Wyniki homogenizacji numerycznej – stałe materiałowe

Prze- dział	Średnica włókna [ $\mu\text{m}$ ]	$E_x=E_y$ [GPa]	$E_z$ [GPa]	$G_{xy}$ [GPa]	$G_{yz}=G_{zx}$ [GPa]	$\nu_{xy}=\nu_{yx}$	$\nu_{xz}=\nu_{yz}$	$\nu_{zx}=\nu_{zy}$
1	13,8	10,145	91,431	1,050	~0	0,419	~0	0,304
2	13,4	9,569	86,437	1,035	~0	0,430	~0	0,307
3	13	9,048	81,589	1,013	~0	0,441	~0	0,310
4	12,6	8,588	76,889	1,000	~0	0,451	~0	0,312
5	12,2	8,174	72,335	0,986	~0	0,459	~0	0,315
6	11,8	7,801	67,928	0,973	~0	0,467	~0	0,318
7	11,4	7,465	63,668	0,960	~0	0,474	~0	0,321
8	11	7,157	59,554	0,942	~0	0,481	~0	0,323
9	10,6	6,882	55,588	0,930	~0	0,487	~0	0,326
10	10,2	6,632	51,768	0,918	~0	0,492	~0	0,328
11	9,8	6,405	48,096	0,906	~0	0,496	~0	0,330
12	9,4	6,198	44,570	0,895	~0	0,500	~0	0,333
13	9	6,008	41,191	0,879	~0	0,503	~0	0,335
14	8,6	5,835	37,958	0,869	~0	0,505	~0	0,337
15	8,2	5,678	34,873	0,858	~0	0,507	~0	0,339
16	7,8	5,533	31,935	0,848	~0	0,508	~0	0,341
17	7,4	5,400	29,143	0,839	~0	0,509	~0	0,343
18	7	5,277	26,499	0,825	~0	0,508	~0	0,345
19	6,6	5,164	24,001	0,816	~0	0,507	~0	0,346
20	6,2	5,059	21,650	0,808	~0	0,506	~0	0,348

Gdzie:

$E_i$  – moduły Young'a względem  $i$ -tej osi materiału

$G_{ij}$  – moduły Kirchhoffa'a względem  $ij$ -tej płaszczyzny materiału

$\nu_{ij}$  – współczynniki Poissona

Na podstawie wyników homogenizacji zauważono zmniejszanie się wartości zastępczych modułów Younga oraz Kirchhoffa wraz ze spadkiem objętościowego udziału włókna. Oznacza to spadek sztywności materiału, a zatem zwiększenie odkształceń powstałych w materiale pod wpływem zewnętrznych obciążeń.

#### 4 Podsumowanie

W wyniku przeprowadzonego modelowania wieloskalowego materiału gradientowego zostały wyznaczone zastępcze stałe materiałowe dla

poszczególnych przedziałów tego materiału. Można zauważyć, że mimo liniowej zmiany parametru wejściowego w postaci średnicy włókna zmiany zastępczych stałych materiałowych są nieliniowe, co jest również związane z nieliniową zmianą udziału objętościowego materiałów składowych. Przedstawione wartości modułów sprężystości mieszczą się w przedziale wartości materiałowych substancji składowych oraz wykazują ciągłą zmianę. Na podstawie takiej analizy można uznać wyniki za prawidłowe. Nie zostały przeprowadzone doświadczalne badania wytrzymałościowe, co jest spowodowane niską dostępnością tak specjalizowanych materiałów.

Otrzymane wyniki mogą z powodzeniem służyć dalszemu modelowaniu elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiału gradientowego [8]. Kolejnym etapem badań może być optymalizacja parametrów mikroskopowych takich jak średnice początkowe i końcowe włókien wzmocnienia kompozytu np. w celu zmniejszenia maksymalnego ugięcia obciążonej belki, przy minimalizacji udziału objętościowego włókna. Takie badania mogą służyć zwiększeniu przystosowania projektowanego materiału do konkretnych zadań.

## 5 Literatura

- [1] German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Politechnika Krakowska 2001
- [2] Kelly A., *Concise Encyclopedia of Composite Materials*, Pergamon, 1994
- [3] Kaczmarczyk Ł., *Numeryczna analiza wybranych problemów mechaniki ośrodków niejednorodnych*, Politechnika Krakowska 2006
- [4] Patran 2010 User's Guide, [http://www.mssoftware.com/training\\_videos/patran/Reverb\\_help/index.html#page/Patran%2520Users%2520Guide/preface.html#](http://www.mssoftware.com/training_videos/patran/Reverb_help/index.html#page/Patran%2520Users%2520Guide/preface.html#)
- [5] Kouznetsova V., *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multiphase materials*, PhD. thesis, Technische Universiteit Eindhoven 2002
- [6] Zohdi T., Wriggers P., *An introduction to computational micromechanics*, Springer 2004
- [7] Łydzba D., *Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał*, Oficyna Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 2002
- [8] Hernik Sz., *Projektowanie elementów konstrukcyjnych z materiałów gradientowych*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska 2009



## **FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS – MULTISCALE MODELLING**

Summary – The paper presents a method for multiscale modelling of graded materials, on the example of fiber composite with varying fiber diameter. The aim of modelling was to determine the macroscopic material properties, which define changes in graded material. Calculations were based on stress analysis by means finite element method and numerical homogenization.

Keywords: multiscale modelling, numerical homogenization, graded materials, fiber composites, finite element method