

**Elżbieta Radaszewska, Jan Turant**  
Politechnika Łódzka  
Katedra Mechaniki i Informatyki Technicznej  
email: elzbieta.radaszewska@p.lodz.pl, jan.turant@p.lodz.pl

## **OPTYMALNE PROJEKTOWANIE ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH WYKONANYCH Z KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH**

**Streszczenie** – W pracy zajęto się problemem projektowania optymalnych struktur kompozytów włóknistych ze względu na ich własności przewodzenia ciepła. Projektowanymi parametrami kompozytu była orientacja włókien wypełniających warstwę kompozytu. Do poszukiwania optymalnych rozwiązań opracowano system optymalizacyjny będący szeregowym połączeniem algorytmu ewolucyjnego i gradientowego. Analizę zachowania się konstrukcji przeprowadzono metodą elementów skończonych zaś gradient funkcjonału celu wyznaczono korzystając z metody bezpośredniej analizy wrażliwości.

**Słowa kluczowe:** materiały kompozytowe, przepływ ciepła, optymalne projektowanie, algorytm hybrydowy

### **1 Wprowadzenie**

Spośród nowoczesnych materiałów inżynierskich jedynie kompozyty stwarzają możliwość swobodnego kształtowania własności. Nie są one jednak łatwym materiałem do optymalnego projektowania, zwłaszcza jeśli oczekujemy wysokiej wytrzymałości wyrobu końcowego. Metody analityczne zawodzą w wielu przypadkach z powodu skomplikowanego kształtu i trudnych do określenia własności lokalnych. W takich przypadkach jedynym rozsądnym rozwiązaniem jest analiza numeryczna, np. przy użyciu metody elementów skończonych. Modelowanie, a następnie symulacja komputerowa warunków pracy przyszłego wyrobu kompozytowego umożliwi wstępną weryfikację założeń projektowo-konstrukcyjnych. W szczególnym przypadku, stosując kompozyty do budowy elementów konstrukcyjnych, symulacja pozwala na optymalne dobranie własności materiałowych poszczególnych warstw laminatu, poprzez dostosowanie rodzaju wypełnienia oraz matrycy.

Kompozyty stanowią bardzo ważną grupę materiałów kompozytowych. Ich niewielka cena i łatwość kształtowania w połączeniu z potencjalnie wysokimi własnościami wytrzymałościowymi powodują, że spektrum ich zastosowań rozciąga się od artykułów codziennego użytku domowego do zaawansowanych zastosowań kosmicznych.

Projektując odpowiednie ułożenie włókien wypełniających możemy kształtować nie tylko parametry wytrzymałościowe kompozytu, ale również jego własności termiczne zależne od kierunków ułożenia włókien. Odpowiednie ułożenie włókien daje możliwość sterowania przepływem ciepła w elementach konstrukcyjnych umożliwiając lepsze lub (w zależności od potrzeb) gorsze warunki przewodzenia ciepła w wybranych kierunkach.

W przypadku konstrukcji wykonanych z materiałów kompozytowych, analiza ich zachowania się pod obciążeniem cieplnym jest nierozłączna z analizą kompozytu i cech charakterystycznych jego budowy, gdyż termiczne charakterystyki materiałowe kompozytowego elementu konstrukcyjnego są ściśle związane z jego wewnętrzną budową. Można więc powiedzieć, że każda konstrukcja może wymagać indywidualnego zaprojektowania optymalnego dla niej materiału kompozytowego. Własnościami materiału kompozytowego możemy sterować poprzez dobór takich parametrów strukturalnych jak: własności termiczne matrycy i włókien, objętościowy udział i kształt przekroju włókien wypełniających w warstwach, orientacja i ułożenie włókien w analizowanym elemencie konstrukcyjnym, czy też liczba i grubość warstw.

## **2 Modelowanie materiałów kompozytowych z uwagi na ich cieplne własności**

Materiały kompozytowe zbudowane z powtarzalnych elementów zwykle traktuje się dla celów analizy jako jednorodne czyli homogeniczne ciała o uśrednionych cieplnych współczynnikach wyznaczonych w oparciu o bilans cieplny oraz podstawowe prawo Fouriera [2,3,8]. W wyniku homogenizacji otrzymuje się wielkości opisujące charakter i szybkość przewodzenia ciepła wewnątrz materiału, opisywane przede wszystkim współczynnikami przewodności cieplnej.

W niniejszej pracy została wykorzystana metoda obliczania zastępczych współczynników przewodności cieplnej w kierunku wzdłużnym i poprzecznym do włókien dla elementu kompozytowego wypełnionego włóknami o kołowym kształcie przekroju poprzecznego zaproponowana i opisana w publikacjach [2,3].

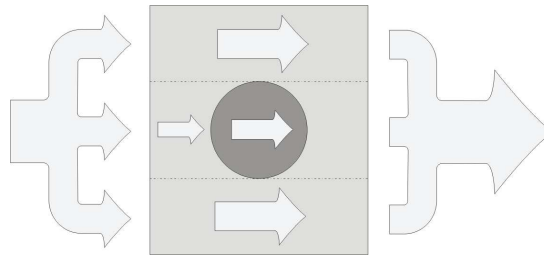
Został również zbudowany jednorodny model zastępczy kompozytu, który stanowił punkt wyjścia do sformułowania zadania optymalizacji w procesie jego projektowania.

Zastępczy współczynnik przewodności cieplnej wzdłuż włókien można otrzymać z bilansu strumienia ciepła płynącego w kierunku pokrywającym się z osią włókna  $x_1$ , dla założonego takiego samego gradientu temperatury we włóknie, matrycy i zastępczym materiale.

Uwzględniając wartości współczynników przewodności cieplnej włókna  $\lambda_w$  i matrycy  $\lambda_m$  oraz udział objętościowy włókna  $\rho_w$ , uzyskuje się zależność określającą zastępczy wzdłużny współczynnik przewodności cieplnej.

$$\lambda_{x_1} = \rho_w (\lambda_w - \lambda_m) + \lambda_m \quad (1)$$

Przepływ ciepła w kierunku poprzecznym do włókien w elemencie zależy od kształtu poprzecznego przekroju włókna. W każdej warstwie materiału kompozytowego ciepło przepływa w jednej części warstwy szeregowo przez matrycę i włókno w drugiej tylko przez matrycę (rys.1).



Rys. 1. Przepływ strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do kierunku włókna

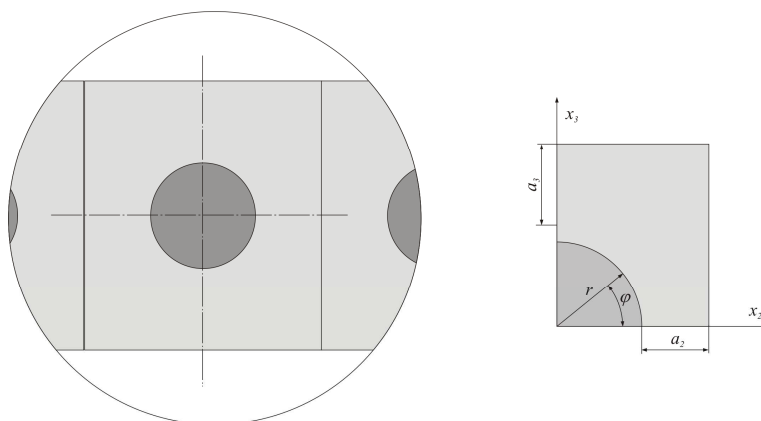
Dla włókna o kołowym przekroju poprzecznym można rozpatrywać tylko część czwartą pojedynczej komórki przekroju poprzecznego płyty kompozytowej tak jak pokazano to na rys.2. Strumień ciepła przepływa tutaj w jednej części szeregowo tylko przez matrycę, w drugiej części zarówno przez matrycę jak i włókno, przy czym drogi strumienia są zależne od kąta  $\varphi$ .

Uwzględniając bilans cieplny w obu częściach warstwy, zastępczy współczynnik przewodności cieplnej warstwy materiału kompozytowego w kierunku osi  $x_2$  można zgodnie z [3] przedstawić w postaci:

$$\lambda_{x_2} = \lambda_m \left[ 1 + \frac{r}{a_3 + r} \left( \frac{\lambda_{mw2}}{\lambda_m} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

gdzie:

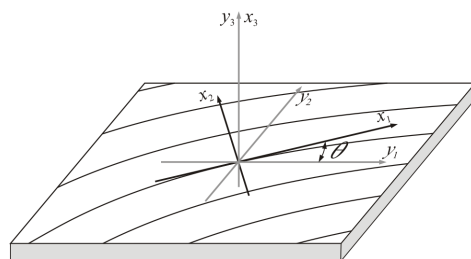
$$\lambda_{mw2} = \frac{\lambda_m}{2u} \left( \pi - \frac{4 \operatorname{ArcTanh} \left( \frac{-1+u}{\sqrt{-1+u^2}} \right)}{\sqrt{-1+u^2}} \right) \quad \text{gdzie} \quad u = \frac{r}{a_2 + r} \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_w} - 1 \right) \quad (3)$$



Rys. 2. Pojedyncza komórka przekroju poprzecznego płyty kompozytu i jej część czwarta

Tak więc głównym celem modelowania kompozytu obciążonego termicznie jest wyznaczenie zastępczych współczynników przewodności cieplnej dla materiału kompozytowego, uwzględniając kształt przekroju poprzecznego włókien wypełniających matrycę, a następnie określenie macierzy przewodności tego materiału konstrukcyjnego w funkcji parametrów materiałowych i geometrycznych opisujących jego strukturę.

Budowa kompozytu sprawia, że orientacja włókien w każdej warstwie może być inna w stosunku do dowolnie przyjętego globalnego układu odniesienia (rys.3).



Rys. 3. Orientacja włókna w warstwie kompozytu

W oparciu o odpowiednie relacje transformacyjne macierz zastępczych współczynników przewodności cieplnej dla ortotropowej warstwy kompozytu określona w globalnym układzie współrzędnych jest wyrażona zależnością [3]:

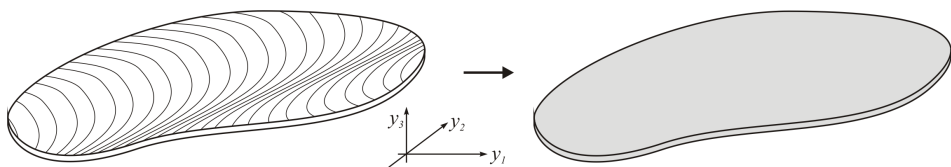
$$\begin{bmatrix} \lambda_{y_1} & \lambda_{y_{12}} \\ \lambda_{y_{21}} & \lambda_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x_1} \cos^2 \theta_k + \lambda_{x_2} \sin^2 \theta_k & (\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2}) \sin \theta_k \cos \theta_k \\ (\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2}) \sin \theta_k \cos \theta_k & \lambda_{x_1} \sin^2 \theta_k + \lambda_{x_2} \cos^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

Otrzymany ortotropowy model kompozytu stanowi punkt wyjścia do sformułowania zadania optymalizacji w procesie projektowania optymalnej struktury kompozytowych elementów konstrukcyjnych pracujących pod obciążeniem cieplnym.

### 3 Sformułowanie problemu

W pracy został rozpatrzony płaski dwuwymiarowy element konstrukcyjny obciążony termicznie, wykonany z mikroskopowo niejednorodnego materiału w postaci kompozytu składającego się z matrycy wypełnionej włóknami o różnych od matrycy własnościach termicznych.

Mikroskopowo niejednorodny materiał kompozytowy został zastąpiony, dla celów analizy zjawiska przepływu ciepła w elemencie konstrukcyjnym, makroskopowo jednorodnym materiałem ortotropowym (rys.4). Własności termiczne takiego materiału, zależą od: własności termicznych matrycy i włókien wypełniających, od udziału objętościowego składników, kształtu przekroju i linii włókien wypełniających [2,3,4].



Rys. 4. Mikroskopowa niejednorodność i makroskopowa jednorodność materiału

W pracy założono, że matryca jest jednorodna, izotropowa o określonym współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_m$ , zaś włókna są długie, o kołowym kształcie przekroju poprzecznego, jednokierunkowo i równomiernie rozłożone w matrycy, jednorodne, izotropowe o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_w$ .

Zagadnienie to opisano równaniem różniczkowym ustalonego przewodnictwa ciepła, które uzupełniono odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Przewodzeniem ciepła w ciałach stałych i nieruchomych cieczach rządzi prawo Fouriera [8], zgodnie z którym natężenie strumienia przewodzonego ciepła jest proporcjonalne do gradientu temperatury mierzonego wzdłuż kierunku przepływu ciepła.

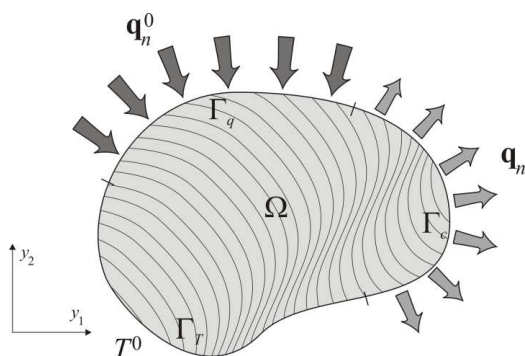
$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{q}$  - natężenie strumienia przewodzonego ciepła,  $\nabla T$  - gradient pola temperatury,  $\lambda$  - macierz współczynników przewodzenia.

Zagadnienie dwuwymiarowego ustalonego przewodzenia ciepła, w przypadku gdy parametry fizyczne ciała nie zależą od temperatury sprowadza się do rozwiązania w obszarze  $\Omega$  równania:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + f = 0 \quad (6)$$

(gdzie  $f$  oznacza wewnętrzne źródło ciepła), z odpowiednimi warunkami brzegowymi panującymi na brzegu  $\Gamma$  (rys.5).



Płaski materiał kompozytowy z zadanymi warunkami brzegowymi

Warunki brzegowe są sformułowane w ogólnej postaci jako pewne wielkości fizyczne określone na konkretnych fragmentach brzegu rozpatrywanego ciała, opisujące wymianę ciepła i mogą być zadane na trzy sposoby:

- warunki brzegowe pierwszego rodzaju, tzw. warunki Dirichleta, określone są przez rozkład temperatury,
- warunki brzegowe drugiego rodzaju, tzw. warunki Neumanna, określone są przez wartość natężenia strumienia cieplnego,

- warunki brzegowe trzeciego rodzaju, tzw. warunki Henkela, określone są poprzez temperaturę otaczającego ośrodka oraz zależność, która opisuje wymianę ciepła między ciałem a tym ośrodkiem,

co możemy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} T &= T^0 && \text{na } \Gamma_T \\ q_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_k = q_n^0 && \text{na } \Gamma_q \\ q_n &= h(T - T_\infty) && \text{na } \Gamma_c \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie  $T^0$  jest zadaną temperaturą,  $\mathbf{n}$  jednostkowym wektorem normalnym do kierunku brzegu,  $h$  jest współczynnikiem konwekcji a  $T_\infty$  oznacza temperaturę otoczenia.

#### 4 Analiza wrażliwości pól stanu dla ustalonego przepływu ciepła

Zmiana zachowania się elementów konstrukcyjnych pod wpływem zadanego obciążenia cieplnego może być wywołana zmianami parametrów materiałowych kompozytu. Załóżmy, że parametry materiałowe kompozytu: takie jak opis kształtu włókien wypełniających, własności termiczne materiałów matrycy i wypełnienia oraz gęstość nasycenia matrycy włóknami tworzą wektor parametrów  $\mathbf{b}$ . Zmiana każdej ze składowych  $b_p$  tego wektora wywołuje odpowiednie zmiany pól stanu konstrukcji wykonanej z kompozytu.

W celu znalezienia zmian pól stanu na zmiany parametrów materiałowych możemy przeprowadzić analizę wrażliwości korzystając z bezpośredniej metody takiej analizy [1,5,6].

W metodzie tej, nieznane pochodne pól stanu obliczane są przez rozwiązanie pewnych dodatkowych problemów przewodzenia ciepła, opisanych równaniami otrzymanymi w wyniku zróżniczkowania równań problemu podstawowego względem każdego elementu wektora parametrów  $\mathbf{b}$ .

Różniczkując równania (5-7), opisujące zachowanie się konstrukcji podstawowej (rys.5), względem zmiennej  $b_p$  otrzymujemy układ równań o analogicznej postaci do układu (5-7). Konsekwentnie, powstały układ równań możemy traktować jako opis ustalonego przepływu ciepła w konstrukcji, w której rolę pola temperatury spełniałaby jej pochodna po parametrze  $b_p$ , a opis takiej tzw. konstrukcji dodatkowej można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{q}_{,p} + f_{,p} &= 0 \\
 \mathbf{q}_{,p} &= \lambda \nabla T_{,p} + \mathbf{q}^* \\
 \mathbf{q}^* &= -\lambda_{,p} \nabla T
 \end{aligned} \tag{8}$$

z warunkami brzegowymi przyjmującymi postać:

$$\begin{aligned}
 T_{,p} &= 0 \\
 q_{n,p} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{,p} = 0 \\
 q_{n,p} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{,p} = h(T_{,p} - T_{\infty}^p) \\
 T_{\infty}^p &= \frac{h_{,p}}{h}(T - T_{\infty})
 \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie symbol  $(\cdot)_{,p}$  oznacza różniczkowanie cząstkowe po  $p$ -tym parametrze.

Otrzymany układ równań (8-9) opisuje tzw. „ $p$ -tą konstrukcję dodatkową” o takim samym kształcie i wykonaną z materiału kompozytowego o takich samych parametrach termicznych jak konstrukcja podstawowa, ale poddaną działaniu dodatkowego wstępnego strumienia ciepłego  $\mathbf{q}^*$ . Szukane pochodne pól konstrukcji podstawowej wyrażają się zatem przez odpowiednie pola stanu  $p$ -tej konstrukcji dodatkowej i są otrzymywane w wyniku rozwiązania układu równań (8-9), które może być zrealizowane tą samą techniką co rozwiązanie zadania podstawowego (5-7). W praktyce analityczne wyrażenia na wrażliwość poddaje się dyskretyzacji i rozwiązuje numerycznie przy wykorzystaniu metody elementów skończonych [9].

Rozwiązanie problemu podstawowego pozwala wyznaczyć węzłowe wartości temperatury w analizowanej konstrukcji kompozytowej oraz ich pochodne, potrzebne np. w procesie optymalnego projektowania konstrukcji kompozytowej.

## 5 Sformułowanie problemu optymalizacyjnego

Możliwość kształtowania budowy kompozytów pozwala uzyskać żądane własności tych materiałów konstrukcyjnych poprzez optymalne zaprojektowanie ich struktury, a przede wszystkim właściwe rozmieszczenie i zorientowanie włókien wypełniających w matrycy w poszczególnych warstwach.

Każdy z parametrów kompozytu w różnym stopniu decyduje o jego własnościach termicznych, a w konsekwencji także wykonanego z niego



elementu konstrukcyjnego i może być traktowany jako zmienna decyzyjna w procesie projektowania jego struktury.

Z grupy parametrów  $\mathbf{b}$  opisujących strukturę kompozytowego materiału przyjęto jako znane parametry deterministyczne własności termiczne włókien i matrycy, zaś jako zmienne projektowe przyjęto orientację włókien w warstwie. Jak pokazano na rys.3, orientacja włókien wypełniających  $\theta$  jest określona poprzez kąt zawarty pomiędzy osią włókien w dowolnym punkcie warstwy kompozytu a osią  $y_1$  globalnego układu odniesienia [3,4].

W obszarze warstwy parametr ten może być stały i wówczas włókna są ułożone prostoliniowo w matrycy lub może być zmienny i wtedy włókna w matrycy są rozmieszczone krzywoliniowo. Zakładamy, że parametry charakteryzujące kształt każdego włókna są identyczne z parametrami pewnego wzorcowego włókna poprzez przesunięcia którego powstaje rodzina włókien wypełniających.

Projektowanie optymalnych struktur kompozytowych zostało rozpatrzone pod kątem uzyskania przez element konstrukcyjny wykonany z tego materiału określonych własności termicznych. W związku z tym jako funkcjonał celu przyjmuje się miarę jakości opisującą zachowanie się elementu konstrukcyjnego pod wpływem działających obciążeń z uwagi na przyjęte zmienne projektowe. W ogólnej formie funkcjonał celu  $F_c$  został wyrażony jako [1,6]:

$$F_c = \int \Psi(T, \nabla T, \mathbf{q}, f) d\Omega + \int \gamma(T, q_n, T_\infty) d\Gamma \quad (10)$$

gdzie  $\Psi$  i  $\gamma$  są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami swoich argumentów.

Ogólny funkcjonał (10) może przybierać różne szczególne postaci, będące np. miarami równomierności rozkładów temperatur w wybranych obszarach konstrukcji czy strumienia ciepła emitowanego przez elementy konstrukcji.

W przypadku konstrukcji mających być najlepszymi przewodnikami ciepła problem optymalizacyjny przyjmie postać:

$$F_c(\mathbf{b}) = \int_{\Gamma_c} q(\mathbf{b}) d\Gamma \rightarrow \max \quad (11)$$

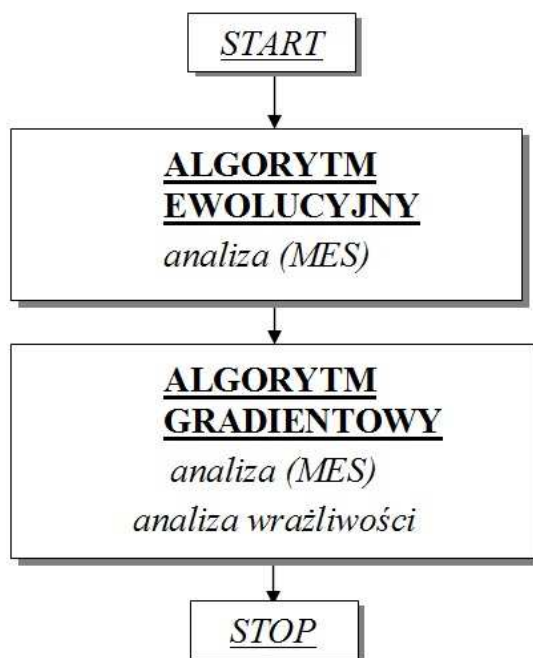
a dla projektowania najlepszych izolatorów byłby przedstawiony w formie:

$$F_c(\mathbf{b}) = \int_{\Gamma_c} q(\mathbf{b}) d\Gamma \rightarrow \min \quad (12)$$

W niniejszej pracy ograniczymy proces optymalizacji do zadań (11) i (12).

## 6 Algorytm optymalizacyjny

Do rozwiązania, sformułowanego zadania optymalnego projektowania struktury materiałów kompozytowych opracowany został tzw. hybrydowy system optymalizacyjny składający się z dwóch szeregowo połączonych algorytmów: ewolucyjnego i gradientowego (rys.6).



Rys. 5. Hybrydowy system optymalizacyjny

Pierwszy etap optymalizacji stanowi algorytm ewolucyjny, który oparty jest na naśladowaniu naturalnych procesów zachodzących w przyrodzie [7].

Algorytm ewolucyjny startuje z losowo wygenerowanej populacji początkowej, generując w kolejnych pokoleniach rozwiązania bliższe rozwiązaniu optymalnemu. W kroku oceny populacji algorytm współpracuje z metodą elementów skończonych [9], dzięki której zostają wyznaczone pola stanu konstrukcji niezbędne do naliczenia wartości odpowiedniego funkcjonału celu.

W celu zwiększenia efektywności obliczeń zastosowano jedną z gradientowych deterministycznych technik optymalizacyjnych, a mianowicie metodę zmiennej metryki, przy czym algorytm tej metody uruchamiany jest z najlepszego rozwiązania znalezionego w wyniku działania algorytmu ewolucyjnego.

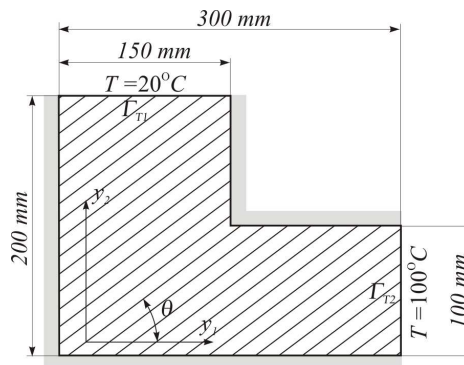
Zastosowanie metody zmiennej metryki w procesie optymalizacji struktury kompozytowych elementów konstrukcyjnych wymagało obliczenia gradientu (wrażliwości pierwszego rzędu) funkcjonału mierzącego jakość konstrukcji względem zmiennych projektowych. Dla funkcjonału celu  $F_c$ , określonego zależnością (10), jego wrażliwość pierwszego rzędu z uwagi na  $p$ -tą składową wektora zmiennych projektowania  $b_p$  (gdzie:  $p = 1, \dots, n$ ) ma postać:

$$F_{c,p} = \int \Psi_{,p} d\Omega + \int \gamma_{,p} d\Gamma \quad (13)$$

Obliczenie pochodnych cząstkowych funkcji podcałkowych wymaga znajomości pochodnych pól stanu, które mogą być wyznaczone korzystając z metody bezpośredniej analizy wrażliwości, przedstawionej w rozdziale 4.

## 7 Numeryczny przykład obliczeniowy

Rozpatrzmy element konstrukcyjny wykonany z kompozytu wypełnionego prostoliniowymi włóknami o przekroju kołowym, rys.7. Na dwóch brzegach elementu  $\Gamma_{T1}$  i  $\Gamma_{T2}$  wymuszono stałą temperaturę, a pozostałe brzegi izolowano termicznie. Zawartość włókien wypełniających w warstwie wynosi 30%. Materiałem wypełnień były włókna szklane o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_w=0.04$  [W/(m K)], matrycę kompozytu stanowiła żywica epoksydowa o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_m=0.3$ [W/(m K)].



Rys. 6. Parametry wymiarowe i obciążenie termiczne elementu

W pracy poszukiwano takiego kierunku osi włókien wypełniających w warstwie kompozytowego materiału, który będzie realizować maksimum strumienia ciepła na brzegu  $\Gamma_{T_1}$  o zadanej temperatury  $T=20$  [°C]. W rozpatrywanym przypadku warstwa kompozytu została wypełniona jedną rodziną prostoliniowych, równoległych włókien, których kierunek określono kątem  $\theta$  mierzonym od dodatniego kierunku osi  $y_1$  tak, jak pokazano to na rys.7. Kąt  $\theta$  ułożenia włókien wypełniających był tutaj parametrem projektowania, którego zmienność założono w granicach od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .

Konsekwentnie, problem optymalizacyjny może być przedstawiony w analogicznej formie do (11) w postaci:

$$\int_{\Gamma_{T_1}} q(\theta) d\Gamma \rightarrow \max \quad (14)$$

Zadanie rozwiązano dla modelu dyskretnego dzieląc obszar konstrukcji na trójkątne, trzywęzłowe elementy skończone w oparciu o opracowany hybrydowy system optymalizacyjny.

Z przeprowadzonej optymalizacji wynika, że dla przyjętego kształtu osi włókien wypełniających rozpatrywany element konstrukcyjny będzie posiadał największą wartość strumienia ciepła na brzegu  $\Gamma_{T_1}$  równą 9,80 [W] przy ułożeniu włókien w materiale kompozytu pod kątem  $\theta=167^\circ$ .

W celu porównania uzyskanych rezultatów optymalizacji przeprowadzono identyczną analizę poszukując takiego ułożenia włókien, dla którego strumień ciepła na tym samym brzegu byłby najmniejszy – czyli analizowany element stanowiłby najlepszy izolator w danej klasie rozwiązań. Aby znaleźć wspomniane ułożenie włókien rozwiązano problem analogiczny do (12):

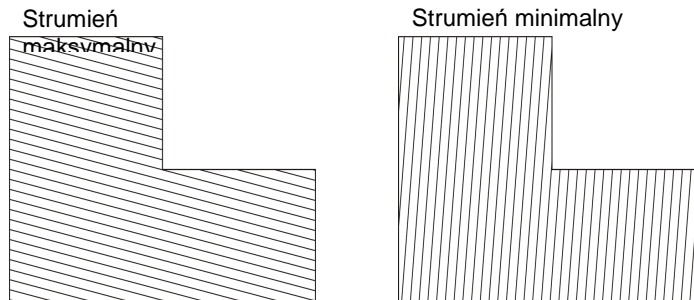
$$\int_{\Gamma_{T_1}} q(\theta) d\Gamma \rightarrow \min \quad (15)$$

W wyniku przeprowadzonego procesu optymalizacyjnego określono kąt nachylenia włókien  $\theta=85^\circ$ . Konstrukcja o tak dobranym kierunku włókien charakteryzowała się strumieniem ciepła na brzegu  $\Gamma_{T_1}$  równym 7,83 [W].

Optymalne ułożenie prostoliniowych włókien odpowiadające maksymalnemu strumieniowi i ułożenie włókien dla konstrukcji o minimalnym strumieniu przedstawiono na rys.8.

Porównując otrzymane wartości funkcjonałów celu dla konstrukcji kompozytowej z optymalnym ułożeniem włókien i konstrukcji porównawczej stwierdzono około 25% wzrost wartości natężenia strumienia ciepła

nego, co wskazuje na duże możliwości sterowania przepływem ciepła w materiałach kompozytowych.



Rys. 7. Ułożenie włókien w konstrukcji optymalnej i porównawczej

## 8 Podsumowanie

Wyniki przedstawione w pracy pozwalają stwierdzić, że dobór odpowiedniego kierunku osi włókien wypełniających w kompozycie wpływa istotnie na uzyskiwane własności termiczne wykonanego z niego elementu konstrukcyjnego. Pełne zalety kompozytowych materiałów konstrukcyjnych można uzyskać w przypadku optymalnego projektowania ich struktury, a przede wszystkim właściwego rozmieszczenia i zorientowania włókien wypełniających w matrycy z punktu widzenia przyjętej w procesie optymalizacji miary jakości kompozytu.

Zaproponowana technika optymalizacyjna, polegająca na połączeniu algorytmu ewolucyjnego z algorytmem gradientowym jest efektywnym narzędziem w rozwiązywaniu zadań projektowania optymalnych struktur kompozytów włóknistych.

Uzyskane wyniki mogą stanowić punkt wyjścia do projektowania struktury materiału kompozytowego stanowiącego tworzywo konkretnej konstrukcji pracującej pod zadaniem obciążeniem pozwalając tym samym uniknąć kosztownych i pracochłonnych badań doświadczalnych, które można ograniczyć do końcowych badań eksperymentalnych gotowej konstrukcji.

## 9 Literatura

- [1] K. Dems, *Sensitivity analysis and optimal design for fibre reinforced composite disks*, Structural Optimization, 11, 1996, s.178-186

- [2] K. Dems, E. Radaszewska, *Modelowanie własności termicznych w wielowarstwowym materiale kompozytowym*, Modelowanie Inżynierskie, Politechnika Śląska, 2006, Vol.1, nr 32, 2006, s. 97-104
- [3] K. Dems, E. Radaszewska, J. Turant, *Modeling of fiber reinforced composite material subjected to thermal load*, Journal of Thermal Stresses, 2012, s.579-595
- [4] J. German, *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1996
- [5] E. Kaćki, A. Małolepszy, A. Romanowicz, *Metody numeryczne dla inżynierów*, Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997
- [6] R. Korycki, *Identyfikacja i optymalne projektowanie kształtu wyrobów i konstrukcji włókienniczych przewodzących ciepło*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 929, 2003, Łódź
- [7] Z. Michalewicz, *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1996
- [8] S. Wiśniewski, T.S. Wiśniewski, *Wymiana ciepła*, WNT, Warszawa, 2000
- [9] O.C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa, Arkady 1972

## **THE OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURAL ELEMENTS MADE OF FIBRE COMPOSITE MATERIALS**

Summary – The dissertation is devoted to the problem of optimal design of two-dimensional structures made of fibre composite materials with respect to their heat conductivity properties. The filling fibres orientation was chosen as design parameters. The hybrid optimization algorithm, consists of a sequence of evolution and gradient-oriented procedures was developed. The behaviour analysis of composite structure was carried out using finite element method and gradients of objective functional were obtained with usage of direct method of sensitivity analysis.

Keywords: composite material, heat conduction, the optimal design, hybrid algorithm