

**Jacek Wiśniewski**  
Katedra Mechaniki i Informatyki Technicznej  
Politechniki Łódzkiej  
ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź  
email: jacek.wisniewski@p.lodz.pl

## **PROJEKTOWANIE STRUKTUR KOMPOZYTOWYCH WZMACNIANYCH SIATKĄ WŁÓKIEN**

Streszczenie – Artykuł przedstawia wyniki badań z zakresu analizy i optymalnego projektowania płaskich, liniowo-sprężystych elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiału kompozytowego wzmocnionego siatką włókien. W artykule zdefiniowano obiekt badań i jego model matematyczny, sformułowano postać zadania projektowania takich struktur oraz przedstawiono metodę rozwiązania tego zadania opartą na algorytmie ewolucyjnym. Wyniki prac zilustrowano przykładami.

Słowa kluczowe: kompozyt włóknisty, projektowanie, algorytm ewolucyjny

### **1 Wprowadzenie**

Udział materiałów kompozytowych w nowo powstających konstrukcjach jest coraz większy, a znaczną grupę stanowią tu kompozyty włókniste będące mieszaniną lekkiej matrycy i różnej postaci włókien wzmacniających. Powszechnie uważa się, że kompozyty włókniste są perspektywiczną rezerwą materiałową dla rozwijającej się techniki, która wymaga materiałów o ściśle określonych własnościach na potrzeby danej konstrukcji.

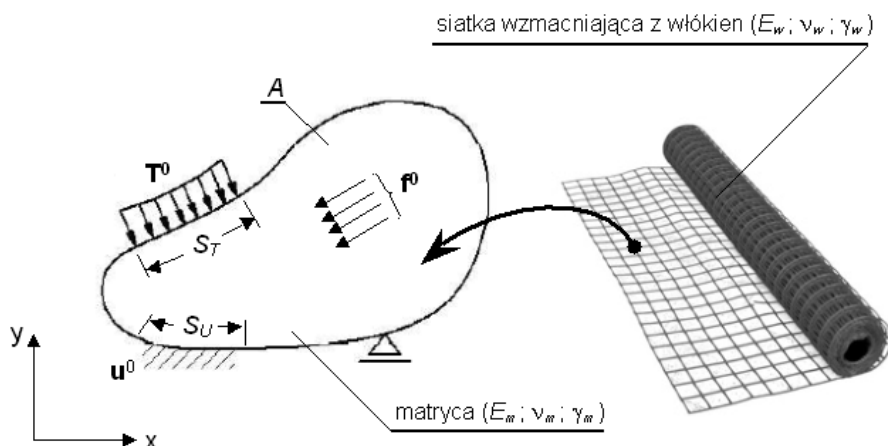
Specyficzna budowa kompozytów włóknistych z różnego typu wzmocnieniem sprawia, że uzyskanie pełnej charakterystyki ich własności, a w konsekwencji analiza zachowania się pod obciążeniem roboczym wykonanych z nich konstrukcji jest procesem złożonym i wymagającym dość kosztownych badań eksperymentalnych. Dlatego też, następujący w ostatnich dekadach bardzo szybki rozwój technik komputerowych, choć nie jest w stanie wyeliminować do końca metod doświadczalnych, to może jednak stanowić ich niezbędne uzupełnienie i w połączeniu stworzyć doskonałe narzędzie do analizy pracy i projektowania optymalnych konstrukcji kompozytowych.

Problem analizy i projektowania różnego typu struktur kompozytowych jest obiektem szerokiego spektrum prac [1,2] prezentujących

najróżniejsze podejście do tego zagadnienia. Jak wynika z rozeznania literaturowego problem ten stanowi nadal interesujący obszar badań naukowych wymagający ciągłego rozszerzenia i wzbogacenia istniejącej już wiedzy. Taki też charakter ma niniejszy artykuł, który przedstawia wyniki prac nad zagadnieniem numerycznego projektowania kompozytowych elementów konstrukcyjnych wzmacnianych siatką wzajemnie ortogonalnych włókien.

## 2 Sformułowanie problemu

Obiektem badań są płaskie, dwuwymiarowe i liniowo-sprężyste elementy konstrukcyjne obciążone statycznie siłami masowymi  $\mathbf{f}^0$  w obszarze  $A$  i obciążeniem  $\mathbf{T}^0$  na brzegu  $S_T$ , działającymi w ich płaszczyźnie, oraz podparte na brzegu  $S_U$  (rys.1).



Rys. 1. Rozpatrywany w pracy kompozytowy element konstrukcyjny

Elementy te wykonane są z materiału kompozytowego w postaci lekkiej matrycy wzmocnionej dwoma, wzajemnie prostopadłymi rodzinami długich i prostoliniowych włókien o wyższych niż matryca własnościach mechanicznych. Matryca pełni rolę spoiwa dla włókien wzmacniających i zapewnia dystrybucję obciążenia między nimi oraz chroni je przed czynnikami zewnętrznymi. Włókna mają za zadanie zwiększenie sztywności i wytrzymałości konstrukcji. Dla składników kompozytu przyjęto następujące założenia:

- matryca jest materiałem jednorodnym, izotropowym i liniowo-sprężystym o zadanej gęstości  $\gamma_m$  oraz własnościach mechanicznych określonych przez moduł Younga  $E_m$  i współczynnik Poissona  $\nu_m$ ,

- włókna są jednorodne, izotropowe i liniowo-sprężyste o gęstości  $\gamma_w$  oraz module Younga  $E_w$  i współczynniku Poissona  $\nu_w$ ,
- włókna są równomiernie rozłożone w matrycy pod kątem  $\theta$  w odniesieniu do osi  $x$  globalnego układu współrzędnych, a ich udział objętościowy w kompozycie wynosi  $\rho_w$  i stanowi sumę udziałów objętościowych włókien w pierwszym  $\rho_{w1}$  i drugim  $\rho_{w2}$  kierunku wzmocnienia,
- połączenie składników kompozytu jest idealne.

Proces projektowania struktur kompozytowych polega na znalezieniu najlepszego zestawu parametrów strukturalnych materiału, takich jak: własności mechaniczne matrycy i włókien, udział objętościowy czy też orientacja wzmocnienia, tak aby funkcjonał opisujący w sposób matematyczny lokalne lub globalne własności wykonanej z niego konstrukcji osiągał wartość ekstremalną przy jednoczesnym spełnieniu pewnej liczby nałożonych wymagań zwanych ograniczeniami. Problem ten ogólnie można więc sformułować w postaci następującego zadania optymalizacyjnego:

*Minimalizacja (maksymalizacja) funkcjonału celu*

$$F_c = \int_A \Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{b}) dA + \int_{S_T} \Phi(\mathbf{T}^0, \mathbf{u}) dS_T \rightarrow \min . (\max) \quad (1)$$

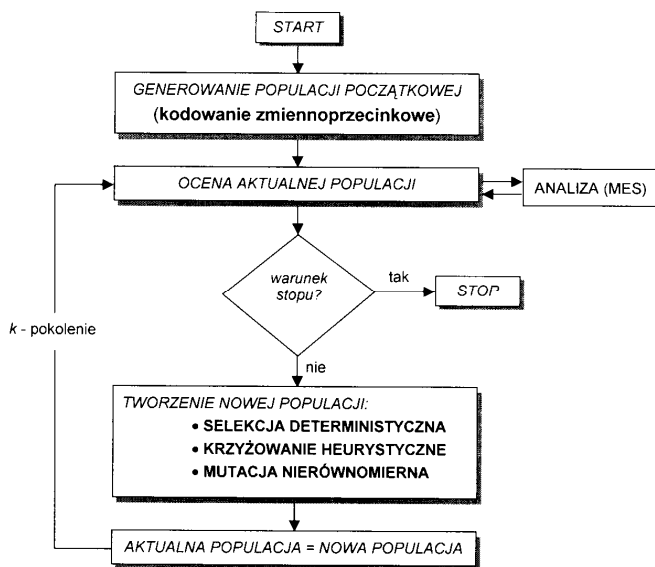
*przy spełnieniu ograniczeń mechanicznych*

$$\left( \int_A \Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{b}) dA + \int_{S_T} \Phi(\mathbf{T}^0, \mathbf{u}) dS_T \right) - G_0 \leq 0 \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  oznacza wektor zmiennych projektowych będących parametrami materiałowo-geometrycznymi definiującymi strukturę materiału kompozytowego,  $\Gamma$  i  $\Phi$  ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami zależnymi od pól stanu powstałych w konstrukcji dla danego wektora zmiennych projektowych, zaś  $G_0$  nałożoną z góry pewną własnością mechaniczną konstrukcji.

### 3 Algorytm ewolucyjny

Do rozwiązania zadania projektowego (1-2) została zaproponowana metoda optymalizacyjna oparta na algorytmie ewolucyjnym z metodą zewnętrznej funkcji kary [3] dla występujących w zadaniu ograniczeń. Sieć działań algorytmu przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu ewolucyjnego

Na etapie oceny populacji (rys.2) przeprowadzana jest analiza pracy kompozytowej konstrukcji w oparciu o metodę elementów skończonych [4]. W analizie tej zostają wyznaczone pola stanu w obciążonym elemencie konstrukcyjnym z uwagi na wygenerowane w aktualnej populacji wartości zmiennych projektowych.

Dla struktury przedstawionej na rys.1, jej zachowanie można opisać poprzez układ następujących równań [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^0 = 0 \\ \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^0 \quad \text{na } S_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{na } S_U \end{array} \right. \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest polem przemieszczeń,  $\mathbf{e}$  polem odkształceń, zaś  $\boldsymbol{\sigma}$  polem naprężeń powstałych w obciążonej mechanicznie konstrukcji kompozytowej.

Występująca, w układzie (3), macierz  $\mathbf{D}$  jest macierzą sztywności tarczowej dla jednorodnego, ortotropowego modelu kompozytu w globalnym układzie współrzędnych x-y i jest wyrażona następującą zależnością [5]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-T} \quad (4)$$

Macierz  $\mathbf{C}$  jest tu macierzą sztywności kompozytu w układzie osi ortotropii 1-2 wyznaczonym przez kierunki włókien w siatce. Macierz ta ma postać [5]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

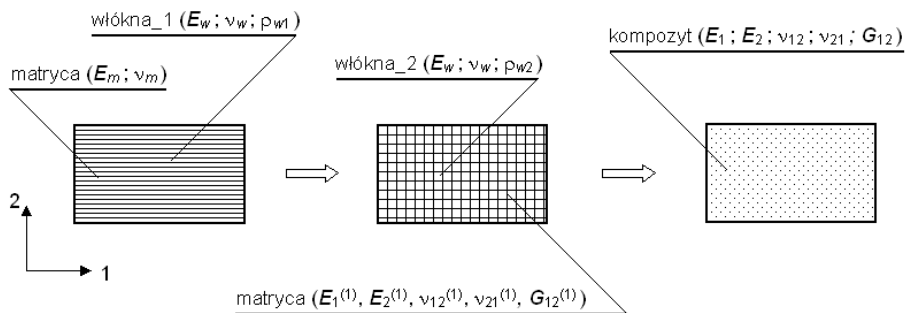
i jest wyrażona w tzw. stałych inżynierskich ortotropowego modelu kompozytu. Macierz  $\mathbf{T}$  jest zaś macierzą transformacji związaną z obrotem układu odniesienia o kąt  $\theta$  zawarty między kierunkiem włókien, a osią  $x$  globalnego układu współrzędnych [5]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

Do celów analizy pracy elementu konstrukcyjnego przedstawionego na rys.1, mikroskopowo niejednorodny materiał kompozytowy jest modelowany płaskim, liniowo-sprężystym i jednorodnym materiałem ortotropowym, dla którego określa się cztery niezależne stałe inżynierskie:

- $E_1; E_2$  – moduł Younga odpowiednio w 1 i 2 kierunku wzmocnienia,
- $\nu_{12}$  – większy współczynnik Poissona,
- $G_{12}$  – moduł ścinania
- oraz zależny od pozostałych
- $\nu_{21}$  – mniejszy współczynnik Poissona
- w układzie osi ortotropii 1-2 wyznaczonym przez kierunki włókien.

Do ich wyznaczania wykorzystano, przedstawiony w [5], model kompozytu wzmocnionego dwukierunkowo oparty na pracach Malmajstera-Tamuza-Tetersa oraz Hashina-Rosena.



Rys. 3. Modelowanie kompozytu wzmocnionego dwukierunkowo

Jak pokazano na rys.3, w pierwszym etapie modelowania określone są stałe inżynierskie kompozytu wzmocnionego jednokierunkowo włóknem o udziale objętościowym  $\rho_{w1}$ . Tak umocniony kompozyt traktowany jest jako makroskopowo jednorodna matryca o własnościach ortotropowych, którą następnie wzmacnia się włóknem o udziale objętościowym  $\rho_{w2}$  w drugim, prostopadłym do pierwszego kierunku.

Według zależności podanych w [5], stałe inżynierskie kompozytu wzmocnionego dwukierunkowo mają postać:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_w \rho_{w1} + E^{(*)} (1 - \rho_{w1}) & \text{gdzie: } E^{(*)} &= E_2^{(1)} \text{ dla } \rho_w = \rho_{w2} \\
 E_2 &= E_w \rho_{w2} + E_2^{(1)} (1 - \rho_{w2}) \\
 \nu_{21} &= \nu_w \rho_{w2} + \nu_{21}^{(1)} (1 - \rho_{w2}) & \text{oraz} & \quad \nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_1}{E_2} & (7) \\
 G_{12} &= \frac{z_G (1 + \rho_{w2}) + (1 - \rho_{w2})}{z_G (1 - \rho_{w2}) + (1 + \rho_{w2})} G_{12}^{(1)} & \text{gdzie: } z_G &= \frac{E_w}{2(1 + \nu_w) G_{12}^{(1)}}
 \end{aligned}$$

przy czym:

$$E_1^{(1)} = E_w \rho_{w1} + E_m (1 - \rho_{w1})$$

$$E_2^{(1)} = \frac{E_w [1 + (k_e - 1) \rho_{w1}]}{[\rho_{w1} + k_e (1 - \rho_{w1})] [1 + (k_e - 1) \rho_{w1}] - (k_e \nu_m - \nu_w)^2 \rho_{w1} (1 - \rho_{w1})}$$

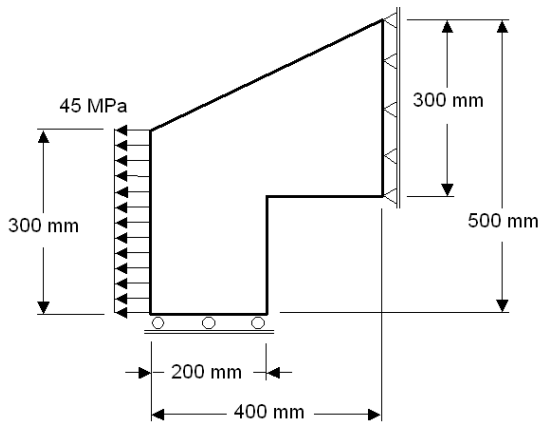
$$\nu_{12}^{(1)} = \nu_w \rho_{w1} + \nu_m (1 - \rho_{w1}) \quad \text{oraz} \quad \nu_{21}^{(1)} = \nu_{12}^{(1)} \frac{E_2^{(1)}}{E_1^{(1)}}$$

$$G_{12}^{(1)} = \frac{E_m [k_e (1 + \nu_m) (1 + \rho_{w1}) + (1 + \nu_w) (1 - \rho_{w1})]}{2(1 + \nu_m) [k_e (1 + \nu_m) (1 - \rho_{w1}) + (1 + \nu_w) (1 + \rho_{w1})]} \quad \text{gdzie: } k_e = \frac{E_w}{E_m}$$

(8)

#### 4 Przykłady

W pierwszym z rozpatrywanych przykładów sztywnościowemu projektowaniu został poddany płaski element konstrukcyjny (rys.4) wykonany z epoksydowej matrycy wzmocnionej siatką włókien grafitowych. Własności mechaniczne matrycy i włókien oraz ich udział objętościowy zawarto w Tabeli 1.



Rys. 4. Element konstrukcyjny poddany obciążeniu i warunkom brzegowym

Za konstrukcję najszywniejszą przyjmuje się taką konstrukcję dla której, praca wykonywana przez siły zewnętrzne na wywołanych przez nie przemieszczeniach osiąga wartość minimalną. Tak więc, problem ten można zapisać w następującej postaci:

$$F_c(\theta) = \int_{S_T} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} dS_T \rightarrow \min. \quad (9)$$

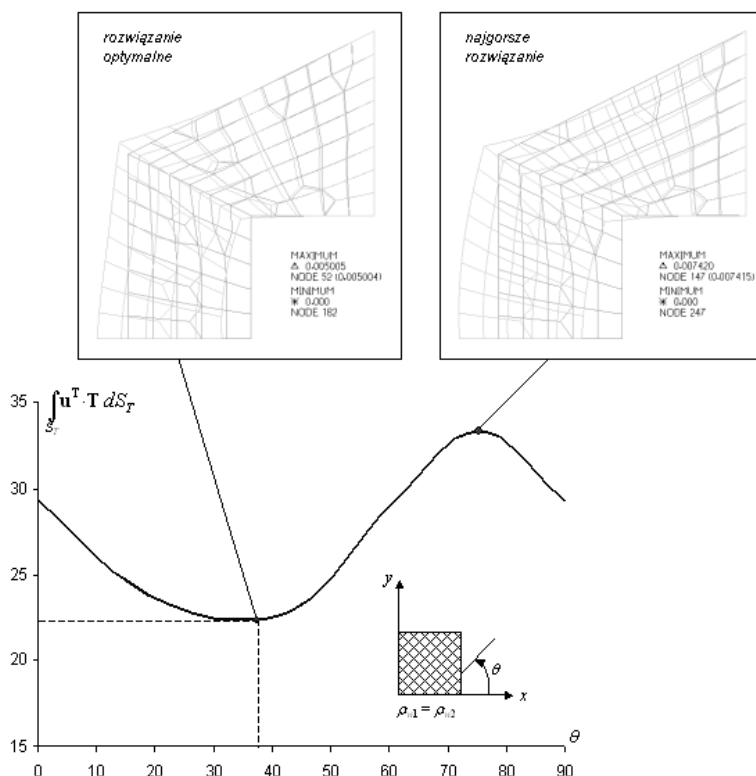
gdzie  $\theta$  jest kątem ułożenia włókien w odniesieniu do osi  $x$  globalnego układu współrzędnych i stanowi zmienną projektową w niniejszym zadaniu. Ponadto przyjęto, że udział objętościowy włókien w każdym kierunku wzmocnienia jest równy, tzn.  $\rho_{w1} = \rho_{w2}$ . Wyniki optymalizacji zestawiono w Tabeli 2.

Tabela. 1. Parametry materiałowo-geometryczne składników kompozytu

	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [%]
matryca (epoksyd)	3.5	0.38	60
włókna (grafit HS)	230.0	0.25	40

Tabela. 2. Optymalne parametry struktury kompozytowej

$\rho_{w1}$ [%]	$\rho_{w2}$ [%]	$\theta$	$SZT_{max}$ [J]
20	20	37,62 <sup>0</sup>	22,17



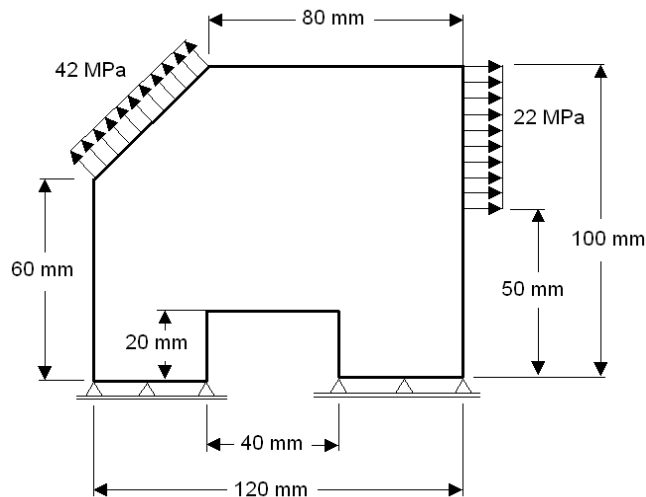
Rys. 5. Analiza zachowania się rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego



W celu zweryfikowania wyników optymalizacji przeprowadzono numeryczną analizę zachowania się elementu konstrukcyjnego pod wpływem działających obciążeń w zależności od kąta ułożenia wzmocnienia w kompozycie, a wyniki tej analizy zaprezentowano na rys.5.

Jak widać z przeprowadzonej analizy, optymalne ułożenie siatki włókien w materiale kompozytowym, podnosi sztywność elementu konstrukcyjnego o 23% w stosunku do klasycznego rozwiązania z ułożeniem siatki równoległe z osiami układu współrzędnych x-y, oraz aż o 33% do rozwiązania w którym element konstrukcyjny byłby najbardziej podatny na odkształcenia.

W drugim z przykładów optymalnemu projektowaniu został poddany płaski element konstrukcyjny (rys.6) wykonany z epoksydowej matrycy wzmocnionej dwoma, wzajemnie prostopadłymi rodzinami prostoliniowych włókien szklanych. Własności mechaniczne matrycy i włókien oraz ich gęstość zawarto w Tabeli 3.



Rys. 6. Element konstrukcyjny poddany obciążeniu i warunkom brzegowym

Tabela. 3. Parametry materiałowe składników kompozytu

	$E$ [GPa]	$\nu$	$\gamma$ [kg/m <sup>3</sup> ]
matryca (epoksyd)	3.5	0.38	$1.15 \cdot 10^3$
włókna (szklane)	75.0	0.22	$2.49 \cdot 10^3$

Problem rozpatrywany w przykładzie dotyczył takiego zaprojektowania ułożenia siatki włókien w matrycy, aby uzyskać możliwie najniższy element konstrukcyjny o wymaganej sztywności wynoszącej 9.10 [J], osiąganą przez element porównawczy. Dla tak sformułowanego pro-

blemu, ogólne kryterium optymalizacji (1-2) przyjmuje następującą postać:

*Minimalizacja masy właściwej kompozytu*

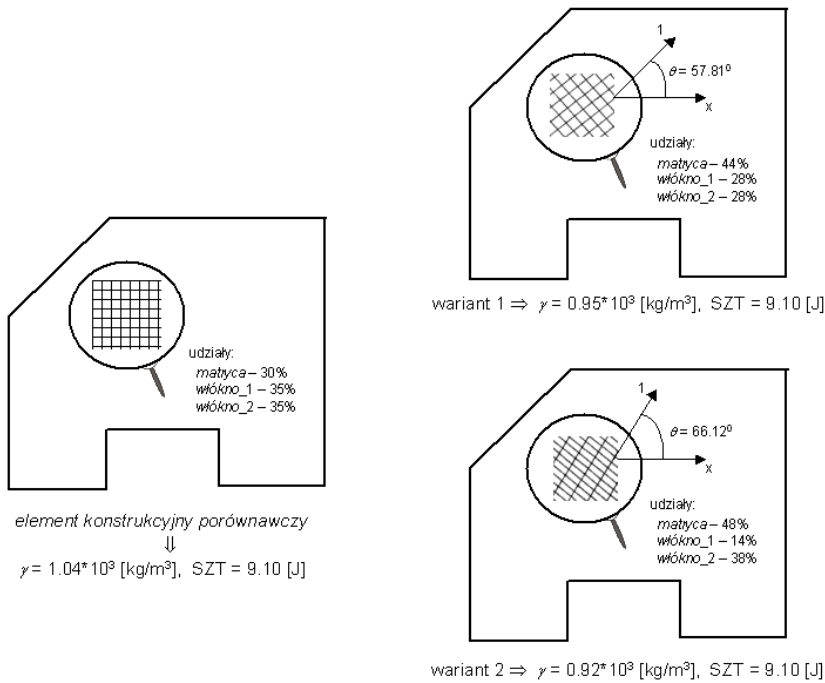
$$(\rho_{w1} + \rho_{w2})(\gamma_w - \gamma_m) + \gamma_m \rightarrow \min. \quad (10)$$

*przy spełnieniu globalnego ograniczenia mechanicznego*

$$\int_{S_T} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} dS_T - 18.20 \leq 0 \quad (11)$$

gdzie  $\rho_{w1}$  i  $\rho_{w2}$  są udziałami objętościowymi włókien, odpowiednio, w pierwszym i drugim kierunku wzmocnienia, zaś  $\theta$  kątem ułożenia siatki w odniesieniu do osi  $x$  globalnego układu współrzędnych. Parametry te były traktowane jako wektor zmiennych projektowych. Zadanie rozpatrzono dla dwóch przypadków, a mianowicie, takiego samego oraz różnego udziału włókien w każdym z kierunków wzmocnienia.

Wyniki uzyskane po procesie optymalizacji, dla każdego z rozpatrywanych wariantów, oraz element konstrukcyjny porównawczy przedstawiono na rys.7.



Rys. 7. Optymalne i porównawczy kompozytowy element konstrukcyjny

Porównując wyniki, zamieszczone na rys.7, można łatwo stwierdzić, że zaprojektowane optymalne rozwiązania obniżają masę właściwą elementu konstrukcyjnego w stosunku do rozwiązania porównawczego o około 10% dla wariantu 1 i 12% dla wariantu 2, przy jednoczesnym zachowaniu wymaganych własności mechanicznych konstrukcji.

## 5 Podsumowanie

Artykuł przedstawia wyniki badań z zakresu analizy i optymalnego projektowania płaskich elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiału kompozytowego składającego się z matrycy wzmocnionej ortogonalną siatką włókien. Jak pokazały badania, wymagane własności mechaniczne dla rozpatrywanych w pracy kompozytowych struktur można uzyskać przede wszystkim w przypadku odpowiedniego rozmieszczenia i zorientowania włókien wzmacniających w matrycy podczas procesu optymalizacji.

Uzyskane wyniki mogą stanowić punkt wyjścia do projektowania struktur kompozytowych wzmocnionych dwukierunkowo i stanowiących tworzywo rzeczywistych płaskich elementów konstrukcyjnych pracujących pod zadanym obciążeniem, pozwalając tym samym uniknąć kosztownych i pracochłonnych badań doświadczalnych, które można ograniczyć do końcowych badań eksperymentalnych gotowej konstrukcji.

## 6 Literatura

- [1] Z. Gürdal, T.R. Haftka, P. Hajela, *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.
- [2] S. Venkataraman, T.R. Haftka, *Optimization of Composite Panel*. Review of the 14<sup>th</sup> Annual Technical Conference of the American Society of Composites, Dayton, 1999.
- [3] Z. Michalewicz, *Algorytmy Genetyczne + Struktury Danych = Programy Ewolucyjne*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1996.
- [4] O.C. Zienkiewicz, *Metoda Elementów Skończonych*. Arkady, W-wa, 1972
- [5] H. Dąbrowski, *Wstęp do Mechaniki Materiałów Kompozytowych*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1989.

## **OPTIMAL DESIGN OF DISKS REINFORCED WITH FIBER NET**

Summary: The results of investigation in the area of analysis and optimal design of thin and linearly elastic disks reinforced with fiber net are presented in the paper. The object of analysis, its mathematical model and relevant task for this type design problem are derived. To solve of the problem, the optimization procedure based on the evolutionary algorithm is proposed. The problem is illustrated by simple numerical examples.

Keywords: fibrous composite, design problem, evolutionary algorithm