

**Dariusz Bojczuk**  
Politechnika Świętokrzyska,  
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego,  
Katedra Inżynierii Produkcji, Zakład Metod Optymalizacji  
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce  
email: mecdb@tu.kielce.pl

## **GEOMETRYCZNA ANALIZA WRAŻLIWOŚCI KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH W UJĘCIU LINIOWYM**

Streszczenie – W pracy, przy zastosowaniu metody układów sprzężonych, rozpatrywany jest problem geometrycznej liniowej analizy wrażliwości polegający na wyznaczeniu zmian położenia wybranych punktów (węzłów) konstrukcji prętowych wywołanych tolerancjami wymiarowymi z jakimi wykonano poszczególne elementy ustroju. W szczególności, badano zagadnienie wyznaczania największego przesunięcia i kierunku w którym występuje. Do analizy takiego problemu zaproponowano odpowiedni algorytm numeryczny i przy jego zastosowaniu rozwiązano przykłady ilustracyjne. Na tej podstawie stwierdzono, że całkowita maksymalna zmiana położenia punktu (węzła) konstrukcji może być znacznie większa niż tolerancje z jakimi wykonano jej poszczególne elementy.

Słowa kluczowe: konstrukcje prętowe, liniowa analiza wrażliwości, metoda układów sprzężonych, tolerancje, zmiana konfiguracji

### **1 Wstęp**

Dobór i analiza tolerancji jest kluczowym elementem w procesach poprawy jakości oraz redukcji kosztów wytwarzania. Dlatego niezbędną wydaje się znajomość wpływu tolerancji poszczególnych wymiarów urządzeń czy konstrukcji na konfigurację tych ustrojów, sposób ich pracy oraz ich koszt. Proces wyznaczania odpowiednich współczynników wyrażających ten wpływ nazywamy analizą wrażliwości i wykorzystujemy do optymalnego projektowania, bądź do dokonywania doraźnych zmian projektu. W pracach [5], [6] rozpatrywano problem wpływu pewnych tolerancji składowych na tolerancję całkowitą. Z kolei problem optymalnego projektowania konstrukcji przy uwzględnieniu wpływu poszczególnych tolerancji jej elementów analizowano w publikacjach [3], [4].

W niniejszej pracy rozpatrywany jest problem wyznaczania zmian położenia wybranych punktów bądź węzłów konstrukcji prętowych wy-

wołanych istnieniem tolerancji wymiarowych ich elementów powodujących zmianę konfiguracji. Takie zagadnienie nazywamy geometryczną analizą wrażliwości (por. [2]). W szczególności analizowany jest tutaj problem wyznaczania największej zmiany położenia i kierunku w którym występuje. Sformułowanie takich problemów przy zastosowaniu metody układów sprzężonych przedstawiono w rozdziale 2, a z kolei w rozdziale 3 zaproponowano algorytm wyznaczania największego przesunięcia. W rozdziałach 4, 5, 6 rozwiązano analityczne i numeryczne przykłady ilustracyjne, zaś rozdział 7 poświęcono podsumowaniu.

## 2 Problem geometrycznej analizy wrażliwości w ujęciu liniowym

Przyjmujemy, że poszczególne pręty bądź segmenty, z których składają się analizowane konstrukcje wykonano z pewnymi tolerancjami. Założymy zatem, że długości kolejnych elementów  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , mogą maksymalnie odchyłać się od wartości nominalnych o tolerancje  $t_i^{(l)}$ , czyli rzeczywiste długości muszą zawierać się w przedziałach  $\langle l_i - t_i^{(l)}; l_i + t_i^{(l)} \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . W wyniku uwzględnienia niedokładności wymiarowych mogą wystąpić następujące efekty:

- stany naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia oraz funkcjonały tych wielkości zmieniają swoje wartości, a ich zmiany można oszacować na podstawie analizy wrażliwości ze względu na tolerancje;

- w konstrukcjach hiperstatycznych, w związku z tolerancjami  $t_i^{(l)}$ , powstają stany naprężeń wstępnych, które można łatwo wyznaczyć analizując konstrukcje z dystorsjami (błędami montażowymi) odpowiadającymi tym tolerancjom;

- w wyniku niedokładności wymiarowych  $t_i^{(l)}$  poszczególne węzły konstrukcji, nawet nieobciążonej, doznają przesunięć, a wartości tych przesunięć można wyznaczyć na podstawie tzw. geometrycznej analizy wrażliwości.

Jako zagadnienie geometrycznej analizy wrażliwości potraktujemy więc problem wyznaczania zmian położenia wybranych węzłów czy punktów ustroju, wywołanych niedokładnościami wymiarowymi  $t_i^{(l)}$  z jakimi zostały wykonane poszczególne pręty czy elementy konstrukcji. Rozważania w tym zakresie dotyczyć będą zarówno konstrukcji statycznie wyznaczalnych jak i statycznie niewyznaczalnych i stanowią rozszerzenie wyników przedstawionych w pracy [2].

Wprowadzimy układ sprzężony, bez niedokładności wymiarowych i o takich samych warunkach brzegowych jak konstrukcja podstawowa oraz obciążony siłą jednostkową  $P^a = 1$  w kierunku badanego

przemieszczenia. Wtedy na podstawie zasady prac przygotowanych (por. [1]) dla układu podstawowego i sprzężonego (rys. 1) mamy

$$P^a w = \sum_{i=1}^n \left( N_i^a \Delta l_i^{(c)} + \int_0^{l_i} M_g^a \kappa^{(c)} dx_i \right), \quad (1)$$

gdzie  $w$  oznacza badane przesunięcie w kierunku działania siły  $P^a = 1$ ,  $\Delta l_i^{(c)}$ ,  $\kappa^{(c)}$  są odpowiednio całkowitym wydłużeniem  $i$ -tego elementu oraz całkowitą krzywizną w układzie podstawowym, zaś  $N_i^a$ ,  $M_g^a$  oznaczają odpowiednio siłę normalną dla  $i$ -tego elementu oraz moment gnący w układzie sprzężonym. Ponadto,  $x_i$  jest osią związaną z  $i$ -tym elementem o początku w odpowiednim węźle i taką, że oś elementu pokrywa się z  $x_i$  oraz odcięte jego punktów są nieujemne. Zauważmy, że rozpatrywane tolerancje wywołują samo-zrównoważony stan naprężenia z wydłużeniami sprężystymi  $\Delta l_i^{(sp)}$  oraz krzywiznami sprężystymi  $\kappa^{(sp)}$  odpowiednio postaci

$$\Delta l_i^{(sp)} = \Delta l_i^{(c)} - \Delta l_i^{(t)}, \quad \kappa^{(sp)} = \kappa^{(c)}, \quad (2)$$

gdzie niedokładności związane z wprowadzonymi tolerancjami można przedstawić za pomocą współczynników  $\alpha_i$  takich, że  $-1 \leq \alpha_i \leq 1$ , czyli

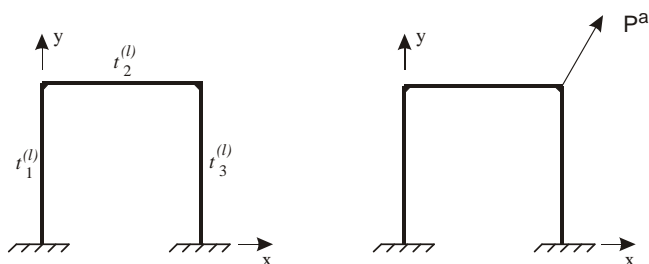
$$\Delta l_i^{(t)} = \alpha_i t_i^{(l)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Następnie, stosując zasadę prac przygotowanych dla układu sprzężonego oraz dla stanu odkształceń sprężystych w układzie podstawowym wyrażonego przez (2), mamy

$$\sum_{i=1}^n \left( N_i^a \Delta l_i^{(sp)} + \int_{l_i} M_g^a \kappa^{(sp)} dx_i \right) = 0. \quad (4)$$

Podstawiając (4) do (1) przy uwzględnieniu (2), (3) wartość przesunięcia  $w$  w pewnym, wybranym kierunku można przedstawić w postaci

$$w = \sum_{i=1}^n N_i^a \alpha_i t_i^{(l)}. \quad (5)$$



Rys. 1. Konstrukcja podstawowa i konstrukcja sprzężona

Z kolei wartość maksymalnego przesunięcia w rozpatrywanym kierunku odpowiada wartościom  $\alpha_i = 1$  lub  $\alpha_i = -1$ . Przesunięcie to występuje, gdy współczynniki  $\alpha_i = \pm 1$  jednocześnie mają taki sam (albo jednocześnie przeciwny) znak jak odpowiednie siły normalne  $N_i^a$  określając tzw. „najgorsze układy tolerancji”. W takiej sytuacji wartość ta wynosi

$$|w|_{\max} = \sum_{i=1}^n |N_i^a t_i^{(l)}|. \quad (6)$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie wyznaczenia wartości maksymalnego przesunięcia wybranego węzła. Przyjmijmy, że jego kierunek jest określony pewnym kątem  $\beta$  jaki tworzy to przesunięcie z osią  $x$  globalnego układu współrzędnych  $x, y$ . Wtedy jego wartość można wyznaczyć na podstawie odpowiednich przesunięć w kierunku poziomym  $w_x$  oraz w kierunku pionowym  $w_y$ . Zatem mamy

$$\begin{aligned} P^a w_c &= P^a w_x \cos \beta + P^a w_y \sin \beta = \\ &= \sum_{i=1}^n N_i^{a(1)} \alpha_i t_i^{(l)} \cos \beta + \sum_{i=1}^n N_i^{a(2)} \alpha_i t_i^{(l)} \sin \beta = \\ &= \sum_{i=1}^n (N_i^{a(1)} \cos \beta + N_i^{a(2)} \sin \beta) \alpha_i t_i^{(l)}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie  $N_i^{a(1)}$ ,  $N_i^{a(2)}$  oznaczają siły w  $i$ -tym pręcie wywołane siłą jednostkową przyłożoną w badanym węźle odpowiednio w kierunku poziomym i pionowym. Stąd maksymalne przesunięcie, które wystąpi w pewnym kierunku określonym nieznanym kątem  $\beta$ , po uwzględnieniu

ekstremalnych wartości współczynników  $\alpha_i$ , można przedstawić następująco

$$|w_c|_{\max} = \max_{\beta} \left[ \sum_{i=1}^n \left| (N_i^{a(1)} \cos \beta + N_i^{a(2)} \sin \beta) t_i^{(l)} \right| \right]. \quad (8)$$

czyli problem sprowadza się do przeprowadzenia maksymalizacji ze względu na kąt  $\beta$ .

### 3 Algorytm wyznaczania największego przesunięcia

Na podstawie poprzednich rozważań proponujemy następujący algorytm wyznaczania największych przesunięć w wybranych punktach (węzłach) konstrukcji spowodowanych założonymi błędami wykonania:

1° Wybierz punkty (węzły), w których zostaną wyznaczone odpowiednie największe przesunięcia.

2° Wprowadź odpowiednie konstrukcje sprzężone jako ustroje obciążone kolejno siłami jednostkowymi w wybranych punktach (węzłach) w kierunkach wyznaczonych przez osie przyjętego globalnego układu współrzędnych.

3° Rozwiąż konstrukcje sprzężone, a w szczególności wyznacz siły normalne w prętach.

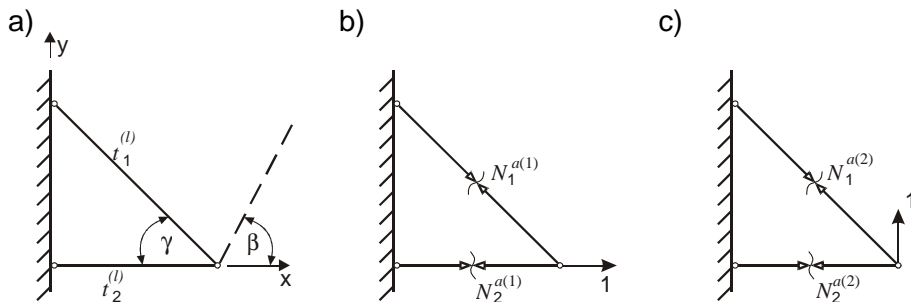
4° Rozwiąż problem optymalizacyjny (8) w celu wyznaczenia kierunków określonych kątami  $\beta$  oraz  $\beta + \pi$  w którym występuje największe przesunięcie oraz określ wartość tego przesunięcia.

5° Wyznacz dwa tzw. „najgorsze układy tolerancji” o przeciwnych znakach towarzyszące przesunięciu maksymalnemu występującemu odpowiednio w kierunkach określonych kątami  $\beta$  oraz  $\beta + \pi$ .

Zauważmy, że algorytm wyznaczania największych przesunięć węzłów może być włączony do dowolnego programu analizy konstrukcji jako opcja dodatkowa. Ponieważ konstrukcje sprzężone mają taką samą konfigurację i wymiary przekrojowe lecz są tylko inaczej obciążone jak konstrukcja podstawowa, więc mają również takie same macierze sztywności jak ta konstrukcja, co np. przy zastosowaniu MES znacznie skraca czas obliczeń komputerowych. Ponadto, używane tutaj konstrukcje sprzężone mogą być równocześnie stosowane w analizie wrażliwości przemieszczeń badanych węzłów.

#### 4 Przykład 1: Wyznaczanie największego przesunięcia węzła kratownicy

Rozpatrzmy kratownicę przedstawioną na rys. 2a, w której poszczególne pręty wykonano odpowiednio z tolerancjami  $t_1^{(l)}$  oraz  $t_2^{(l)}$  w stosunku do ich wymiarów nominalnych. Wyznamy maksymalne przesunięcie węzła tego ustroju oraz określimy kąt  $\beta$  w którym ono występuje.



Rys. 2. a) Kratownica podstawowa; b), c) Kratownice sprzężone

Wprowadzamy kratownice sprzężone przedstawione na rys. 2b oraz 2c, obciążone siłami jednostkowymi w kierunkach określonych osiami  $x$  oraz  $y$ . Uwzględniając, że siły w prętach pierwszego układu sprzężonego są równe

$$N_1^{a(1)} = 0, \quad N_2^{a(1)} = 1, \quad (9)$$

zaś w prętach drugiego układu sprzężonego wynoszą

$$N_1^{a(2)} = -\frac{1}{\sin \gamma}, \quad N_2^{a(2)} = \frac{1}{\tan \gamma}, \quad (10)$$

przesunięcie rozpatrywanego węzła w kierunku określonym kątem  $\beta$  na podstawie (7) można przedstawić w postaci

$$w = -\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \alpha_1 t_1^{(l)} + \left( \frac{\sin \beta}{\tan \gamma} + \cos \beta \right) \alpha_2 t_2^{(l)}, \quad (11)$$

gdzie  $-1 \leq \alpha_1 \leq 1$ ,  $-1 \leq \alpha_2 \leq 1$ . Przyjmując, że tolerancje są proporcjonalne do długości prętów zachodzi, że  $t_2^{(l)}/t_1^{(l)} = \cos \gamma$ . Wtedy, uwzględniając, że „najgorszy układ tolerancji” odpowiada sytuacji gdy pręt 1 jest za długi ( $+t_1^{(l)}$ ), zaś pręt 2 za krótki ( $-t_2^{(l)} = -t_1^{(l)} \cos \gamma$ ), przesunięcie maksymalne rozpatrywanego węzła wynosi

$$|w|_{\max} = \left( \sin \beta \frac{1 + \cos^2 \gamma}{\sin \gamma} + \cos \beta \cos \gamma \right) t_1^{(l)}, \quad (12)$$

gdzie kąt określający kierunek tego przesunięcia jest równy

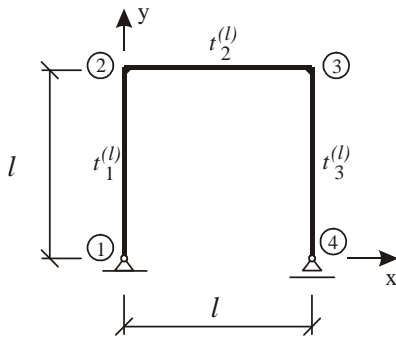
$$\beta = \arctan \frac{1 + \cos^2 \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma}. \quad (13)$$

Przykładowo, gdy  $\gamma = \pi/4$  maksymalne przesunięcie określone kątem  $\beta = \arctan 3$  wynosi  $|w|_{\max} = \sqrt{5}t_1^{(l)}$ , zaś dla  $\gamma = \pi/6$  odpowiednio  $\beta = \arctan 4.0415$  oraz  $|w|_{\max} = 3.6056t_1^{(l)}$ , i dalej rośnie do nieskończoności wraz z malejącym kątem  $\gamma$ . Zauważmy jeszcze, że w każdym przypadku występuje drugie rozwiązanie, które odpowiada kątowi  $\beta + \pi$  i przeciwnym znakom tolerancji.

## 5 Przykład 2: Wyznaczanie największych przesunięć węzłów ramy statycznie wyznaczalnej

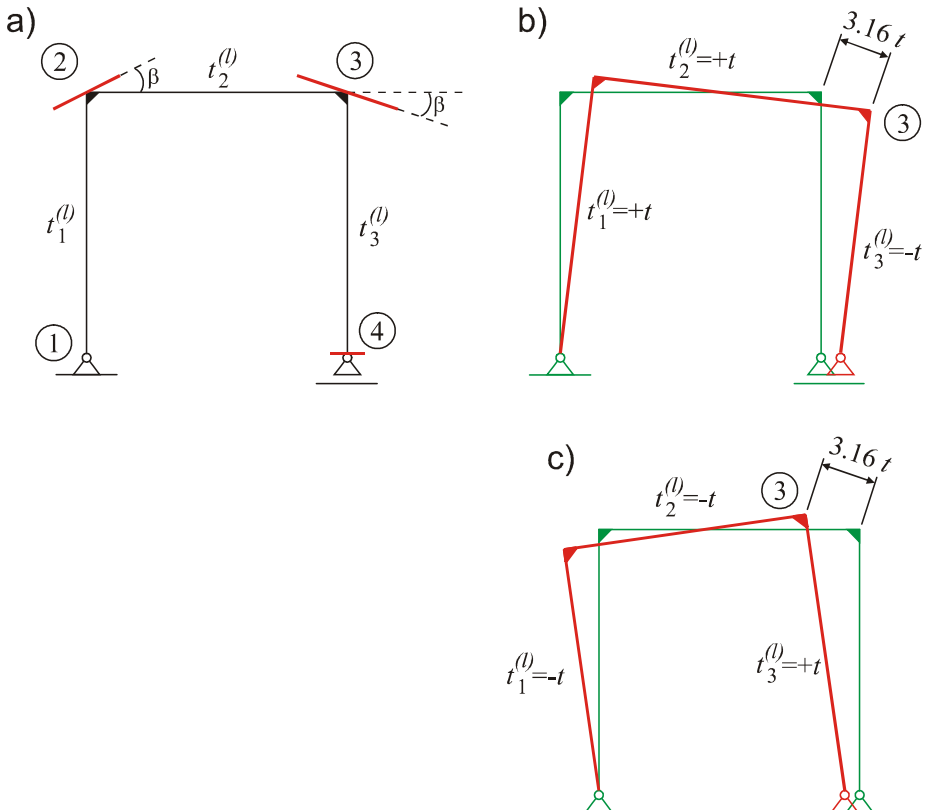
Rozpatrzmy ramę przedstawioną na rys. 3, w której poszczególne pręty wykonano odpowiednio z tolerancjami  $t_i^{(l)} = \mu l$ ,  $i = 1, 2, 3$ , proporcjonalnymi do długości prętów  $l$ , gdzie przyjęto, że  $\mu = 0.001$ . Pozostałe dane umieszczono na rys. 3. Wyznamy maksymalne przesunięcia węzłów tego ustroju oraz określimy w każdym przypadku kąty  $\beta$  w których one występują. Wprowadzamy więc odpowiednie układy sprzężone obciążone siłami jednostkowymi działającymi wzdłuż kierunków określonych osiami  $x$  oraz  $y$  w kolejnych badanych węzłach i w układach tych wyznaczamy siły normalne. Rozwiązując w każdym przypadku problem (8) otrzymujemy wartość maksymalną przesunięcia węzłów, kąt w którym ono występuje oraz odpowiedni „najgorszy układ tolerancji” (Tab. 1, rys. 4a). Zauważmy jeszcze, że podobnie jak w poprzednim przykładzie występuje także drugie rozwiązanie, które

odpowiada kątowi  $\beta + \pi$  i przeciwnym znakom tolerancji (por. rys. 4b i 4c).



$$\begin{aligned}
 A &= 0.02 \text{ m}^2 \\
 E &= 2.15 \times 10^{11} \text{ Pa} \\
 l &= 1 \text{ m} \\
 \mu &= 0.001 \\
 t_i^{(l)} &= \mu * l = 0.001 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Rys. 3. Rama statycznie wyznaczalna



Rys. 4. Rama statycznie wyznaczalna: a) wartość przesunięć maksymalnych węzłów i kierunki w których występują; b) pierwszy najgorszy układ tolerancji odpowiadający maksymalnemu przesunięciu węzła 3; c) drugi najgorszy układ tolerancji odpowiadający maksymalnemu przesunięciu węzła 3



Tabela. 1. Najgorszy układ tolerancji, kąt i wartość przesunięcia maksymalnego w wybranych węzłach

Numer węzła	Tolerancja elementu			$\beta$	$W_{\max}$
	1	2	3		
2	+t	0	-t	26°34'	2.24t
<b>3</b>	<b>+t</b>	<b>+t</b>	<b>-t</b>	<b>-18°26'</b>	<b>3.16t</b>
4	0	+t	0	0°0'	1.00t

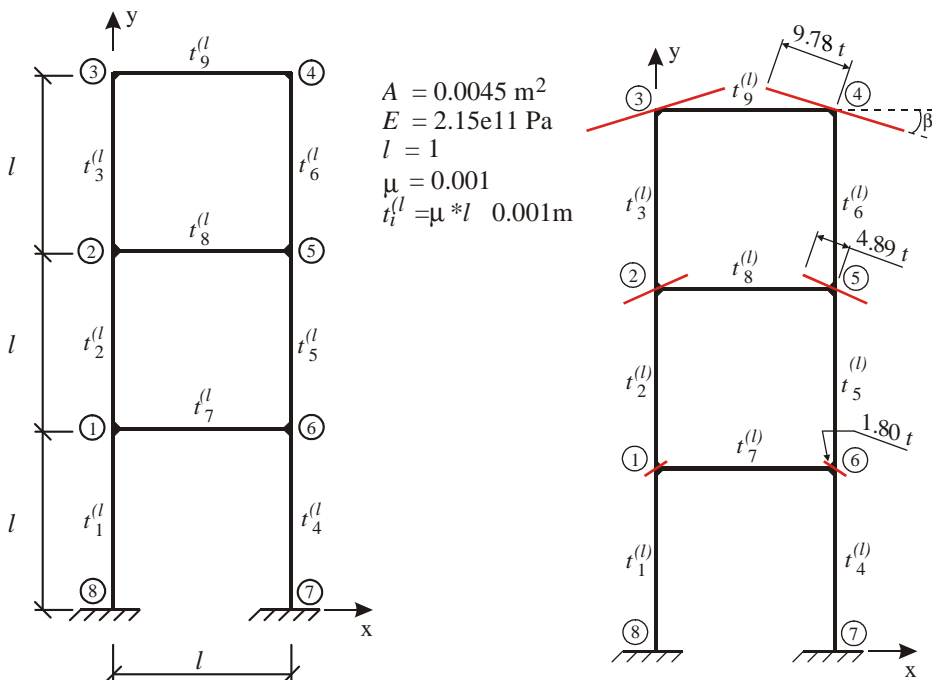
### 6 Przykład 3: Wyznaczanie największych przesunięć węzłów ramy statycznie niewyznaczalnej

Rozpatrzmy ramę przedstawioną na rys. 5, w której poszczególne pręty wykonano odpowiednio z tolerancjami  $t_i^{(l)} = \mu l$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ , proporcjonalnymi do długości prętów  $l$ , gdzie przyjęto, że  $\mu = 0.001$ . Poszczególne pręty mają przekroje pierścieniowe o średnicy  $d = 40$  mm i grubości  $g = 4$  mm, zaś pozostałe dane umieszczono na rys. 5. Wyznamy maksymalne przesunięcia węzłów tego ustroju oraz określimy w każdym przypadku kąty  $\beta$  w których one występują.

Tabela. 2. Najgorszy układ tolerancji, kąt i wartość przesunięcia maksymalnego w węzłach 3, 4

Nr węzła	Tolerancja elementu									$\beta$	$W_{\max}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
3	+t	+t	+t	-t	-t	-t	0	0	-t	17°52'	9.78t
4	+t	+t	+t	-t	-t	-t	0	0	+t	-17°52'	9.78t

W tym celu wprowadzamy odpowiednie układy sprężone obciążone siłami jednostkowymi działającymi wzdłuż kierunków określonych osiami  $x$  oraz  $y$  w kolejnych badanych węzłach, a następnie w każdym przypadku, po wyznaczeniu sił normalnych w prętach układów sprężonych, rozwiązujemy problem (8). Uzyskane wartości maksymalnych przesunięć i kierunki w których występują, biorąc pod uwagę zarówno rozwiązanie określone kątem  $\beta$  jak i kątem  $\beta + \pi$ , pokazano na rys. 5. Z kolei w Tab. 2 przedstawiono „najgorsze układy tolerancji” związane z węzłami 3 oraz 4 w których występują największe przesunięcia, blisko 10-krotnie większe niż tolerancja pojedynczego pręta. Jak można zauważyć, przy zastosowaniu używanego tutaj podejścia liniowego, tolerancje prętów 7, 8 nie wpływają na przesunięcia analizowanych węzłów.



Rys. 5. Rama statycznie niewyznaczalna i największe przesunięcia jej węzłów

## 7 Podsumowanie

W pracy rozpatrywany jest problem wyznaczania przesunięcia, a w szczególności przesunięcia maksymalnego wybranych punktów czy węzłów konstrukcji prętowych, wywołanego istnieniem tolerancji

wymiarowych poszczególnych elementów. W przypadku przesunięcia maksymalnego zastosowano podejście polegające na wyznaczeniu tzw. „najgorszych układów tolerancji”.

Pracę zilustrowano przykładami analitycznymi i numerycznymi. Uzyskane wyniki pozwalają na stwierdzenie, że całkowite przesunięcie wybranych punktów czy węzłów konstrukcji może być znacznie większe niż tolerancje poszczególnych jej elementów.

W pracy zastosowano podejście liniowe, które w zagadnieniach, gdzie w wyniku błędów wykonania mogą wystąpić znaczne zmiany geometrii (np. kratownica Misesa czy kratownica analizowana w rozdziale 4, o małym kącie  $\gamma$ ), jest niewystarczające. W takiej sytuacji istnieje potrzeba rozszerzenia rozważań uwzględniająca teorię nieliniową, co pozwoli na precyzyjniejszy opis takich zagadnień, a także na ujawnienie niestabilności geometrii typu punktu granicznego, które mogą się pojawić na ścieżkach dojścia do stanów odpowiadających „najgorszym układom tolerancji”.

Podziękowanie. Składam podziękowanie mgr inż. Michałowi Jabłońskiemu za pomoc przy rozwiązaniu przykładów ilustracyjnych.

## 8 Literatura

- [1] D. Bojczuk, *Analiza wrażliwości i optymalizacja konstrukcji prętowych*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1999.
- [2] D. Bojczuk, M. Jabłoński, *Geometric sensitivity analysis of truss and frame structures*. Selected Topics of Contemporary Solid Mechanics. Proceedings of the 36th Solid Mechanics Conference, s. 396-397, Gdańsk, 2008.
- [3] K. Dems, W. Gutkowski, *Optimal shape and configuration optimization of multi-loaded structures with manufacturing tolerances*. Proc. V World Congress on Struct. Multidisc. Optim., na płycie CD, Lido di Jesolo, 2003
- [4] W. Gutkowski, J. Latalski, *Structural optimization with member imperfections*, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol 30, 2005, 1-10
- [5] G. Jayaprakash, K. Sivakumar, M. Thilak, *Parametric tolerance analysis of mechanical assemblies by developing direct constraint model in CAD and cost component tolerance synthesis*, Intelligent Control and Automation, vol 1, 2010, 1-14
- [6] Z. Wu, *Sensitive factor for position tolerance*, Research in Engineering Design, vol 9, 1997, 228-234

## **GEOMETRIC SENSITIVITY ANALYSIS OF BAR STRUCTURES IN LINEAR FORMULATION**

Summary: The problem of geometric linear sensitivity analysis of bar structures, which consists in determination of position changes of their points (nodes) induced by dimensional tolerances of structure elements, is discussed in the paper. In particular, the problem of determination of maximal translation of certain point and its direction is analyzed using adjoint method. In order to solve this problem numerical algorithm is proposed and next illustrative examples are solved. On this basis it should be noticed, that the total maximal change in point position may be much greater than the values of particular member tolerances.

Keywords: bar structures, linear sensitivity analysis, adjoint method, tolerances, configuration change