

Paulina Obara¹, Jan Turant^{2,3}

¹ Politechnika Świętokrzyska

Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod
Komputerowych

ul. 1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce

² Wyższa Szkoła Informatyki i Umiejętności w Łodzi

Katedra Inżynierskich Zastosowań Informatyki

³ Politechnika Łódzka

Katedra Mechaniki i Informatyki Technicznej

email: wbia_obara@tu.kielce.pl, jan_turant@wsinf.edu.pl

ŚCISŁA I PRZYBLIŻONA ANALIZA DYNAMICZNA KONSTRUKCJI BELKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie – W pracy analizie dynamicznej poddano konstrukcje zbudowane z elementów belkowych. W rozważaniach uwzględniono wpływ odkształcalności postaciowej. Przeprowadzona została analiza ścisła i przybliżona poszukiwania wyższych częstości drgań własnych dla belki swobodnie podpartej. Przeprowadzenie takiej oceny pokazuje jak złożony powinien być model dyskretny, aby wyniki były stosownie zbliżone do rozwiązań ścisłych.

Słowa kluczowe: wyższe częstości drgań własnych, metoda elementów skończonych

1 Wstęp

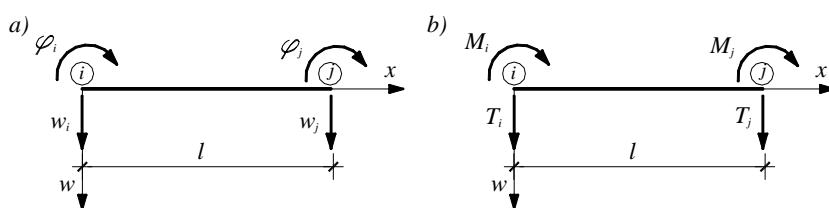
Badania poświęcone zachowaniu się konstrukcji belkowych są jednymi ze starszych w dziedzinie mechaniki ciała odkształcalnego. Najstarsza teoria znana jest jako teoria Bernoulliego-Eulera, w której zakłada się, że płaszczyzna przekroju prostopadła do osi belki w stanie nieodkształconym pozostaje płaska i prostopadła do osi belki odkształconej. Konsekwentnie, pomijany jest wpływ sił poprzecznych. Teoria ta przydatna jest przede wszystkim w analizie belek smukłych, natomiast w przypadku belek krępych stosowana jest teoria Timoshenki uwzględniająca odkształcenia postaciowe. Stosując teorię Timoshenki, w opisie geometrii konfiguracji aktualnej belki uwzględnia się deplanację przekroju poprzecznego i, w konsekwencji, wprowadza się uśredniony kąt odkształcenia postaciowego.

Problem poszukiwania naturalnych charakterystyk dynamicznych konstrukcji jest bardzo istotny ze względu na bezpieczeństwo pracy konstrukcji a liczba powstałych na ten temat artykułów, a dotycząca tylko konstrukcji belkowych, jest olbrzymia np. [1,2,3,4]. Wspomniane tutaj bezpieczeństwo pracy konstrukcji związane jest nie tylko z jej projektowaniem, ale również z jej ciągłym monitorowaniem poprzez badanie jej charakterystyk dynamicznych [5, 6, 7, 8], które zmieniają się, gdy w jej obszarze pojawiają się uszkodzenia. Na szczególną uwagę zasługują prace, w których autorzy zwracają uwagę na większą czułość wyższych postaci drgań własnych na uszkodzenie konstrukcji [9, 10, 11, 12].

W pracy przeprowadzono ścisłą i przybliżoną analizę dynamiczną, celem której było wyznaczenie wyższych częstotliwości drgań własnych belek. Porównano wyniki otrzymane przy zastosowaniu teorii Bernoulliego-Eulera oraz teorii Timoshenki.

2 Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest element belkowy o czterech stopniach swobody (rys. 1.), o stałym i bisymetrycznym przekroju poprzecznym A , momencie bezwładności J oraz o masie μ , która jest równomiernie rozłożona po całej długości l . Założono, że element jest wykonany z izotropowego, liniowo sprężystego materiału o module Younga E , module Kirchhoffa G i współczynniku Poissona ν . W rozważaniach uwzględniono współczynnik ścinania κ , który zależy od kształtu przekroju oraz odkształcalność postaciową ζ , co oznacza, że przekroje poprzeczne prostopadłe do osi w konfiguracji początkowej, w konfiguracji aktualnej nie pozostają prostopadłe do osi odkształconej oraz ulegają deplanacji [1,3,13,14].



Rys. 1. Element belkowy o czterech stopniach swobody: a) współrzędne uogólnione, b) uogólnione siły węzłowe

Dla elementu belkowego przedstawionego na rysunku 1 definiujemy wektory: współrzędnych uogólnionych elementu \mathbf{q}^e (rys. 1a.) oraz uogólnionych sił węzłowych \mathbf{Q}^e (rys. 1b.):

$$\mathbf{q}^e = \{w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j\}, \quad \mathbf{Q}^e = \{T_i, M_i, T_j, M_j\} \quad (1)$$

a związek pomiędzy wielkościami (1) zapiszemy za pomocą zależności:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{Q}^e \quad (2)$$

gdzie \mathbf{K}^e – macierz sztywności dynamicznej elementu, którą otrzymuje się drogą analitycznego rozwiązania odpowiedniego zagadnienia brzegowego.

3 Macierz sztywności dynamicznej elementu

Układając warunki równowagi nieskończenie małego wycinka osi belki w konfiguracji aktualnej (rys. 2b.) oraz wykorzystując związki fizyczne i geometryczne, tworzy się równania różniczkowe, które po uzupełnieniu odpowiednimi warunkami brzegowymi, przedstawiają sformułowany ściśle w ramach przyjętych założeń problem brzegowy. W przypadku poprzecznych drgań harmonicznym belki, przy uwzględnieniu odkształcalności postaciowej, różniczkowe równanie amplitud oraz kąt obrotu przekroju pręta mają postać:

$$\begin{aligned} w^{IV}(\xi) + \lambda^4 \zeta w''(\xi) - \lambda^4 w(\xi) &= 0 \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{l} [\zeta w'''(\xi) + (1 + \lambda^4 \zeta^2) w'(\xi)] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \lambda^4 = \frac{\mu \omega^2 l^4}{EJ}, \quad \zeta = \frac{\kappa EJ}{GA l^2} \quad (4)$$

Parametr (4)₃ uwzględnia wpływ odkształcalności postaciowej i jeżeli przyrównamy go do zera, z zależności (3) otrzymamy równania, które opisują model belki Bernoulliego-Eulera.

Rozwiązaniem równania różniczkowego jednorodnego (3)₁ jest funkcja:

$$w(\xi) = C_i e^{k_i \xi}, \quad i = 1 \div 4 \quad (5)$$

w której współczynniki k_i są pierwiastkami równania charakterystycznego:

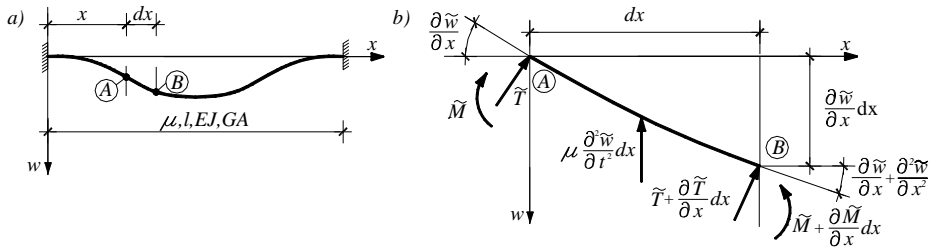
$$(k^4 + \lambda^4 \zeta k^2 - \lambda^4) = 0 \quad (6)$$

i wynoszą:

$$k_{1,2} = \pm p, \quad k_{3,4} = \pm im \quad (7)$$

przy czym:

$$p = \sqrt{\frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^4 \zeta^2 + 4} - \lambda^4 \zeta}{2}}, \quad m = \sqrt{\frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^4 \zeta^2 + 4} + \lambda^4 \zeta}{2}} \quad (8)$$



Rys. 2. a) Belka w konfiguracji aktualnej, b) nieskończenie mały wycinek belki

Całka ogólna (5), która jest funkcją ugięcia analizowanego elementu belkowego, po wykorzystaniu wzorów Eulera:

$$\begin{aligned} e^{\pm a} &= \cosh a \pm \sinh a \\ e^{\pm ia} &= \cos a \pm i \sin a \quad \text{gdzie } a \in R \end{aligned} \quad (9)$$

będzie miała ostatecznie postać:

$$w(\xi) = C_1 \cosh p\xi + C_2 \sinh p\xi + C_3 \cos m\xi + C_4 \sin m\xi \quad (10)$$

Podstawiając odpowiednie pochodne funkcji ugięcia (10) do (3) otrzymujemy funkcję całkowitego uśrednionego kąta obrotu przekroju pręta:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{l} [C_1 A \sinh p\xi + C_2 A \cosh p\xi - C_3 B \sin m\xi + C_4 B \cos m\xi] \quad (11)$$

przy czym:

$$A = \zeta p^3 + (1 + \lambda^4 \zeta^2) p, \quad B = -\zeta m^3 + (1 + \lambda^4 \zeta^2) m \quad (12)$$

Występujące we wzorach (10) i (11) stałe całkowania C_i są wyznaczone z warunków brzegowych (rys. 1a):

$$w(\xi = 0) = w_i; \quad \varphi(\xi = 0) = \varphi_i; \quad w(\xi = 1) = w_j; \quad \varphi(\xi = 1) = \varphi_j \quad (13)$$

Znając stałe całkowania możemy, na podstawie rysunku 1b, określić amplitudy sił przywęzłowych:

$$T_i = -T(\xi = 0), \quad M_i = M(\xi = 0), \quad T_j = T(\xi = 1), \quad M_j = -M(\xi = 1) \quad (14)$$

przy czym:

$$M(\xi) = -\frac{EJ}{l} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}, \quad T(\xi) = \frac{GA}{\kappa l} \left(\frac{dw(\xi)}{d\xi} - \varphi(\xi) l \right) \quad (15)$$

Wzory (14) przekształcają współrzędne uogólnione elementu $\mathbf{q}^e (1)_1$ na uogólnione siły węzłowe $\mathbf{Q}^e (1)_2$ i noszą nazwę wzorów transformacyjnych, które możemy zapisać w postaci macierzowej (2), przy czym macierz sztywności dynamicznej analizowanego elementu belkowego \mathbf{K}^e przedstawia się następująco:

$$\mathbf{K}^e(\lambda) = \frac{EJ}{Dl^2} \begin{bmatrix} \frac{F_5}{l} & F_3 & -\frac{F_6}{l} & F_4 \\ F_3 & F_1 l & -F_4 & F_2 l \\ -\frac{F_6}{l} & -F_4 & \frac{F_5}{l} & -F_3 \\ \frac{F_4}{l} & F_2 l & -F_3 & F_1 l \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D &= 2\lambda^2(1 - \cosh p \cos m) + (A^2 - B^2) \sinh p \sin m \\ F_1 &= (p^2 + m^2)(A \cosh p \sin m - B \sinh p \cos m) \\ F_2 &= (p^2 + m^2)(B \sinh m - A \sin m) \\ F_3 &= \lambda^2(\lambda^4 \zeta (\cosh p \cos m - 1) + (Am + Bp) \sinh p \sin m) \\ F_4 &= \lambda^2(p^2 + m^2)(\cosh p - \cos m) \\ F_5 &= \lambda^2(p^2 + m^2)(A \sinh p \cos m + B \cosh p \sin m) \\ F_6 &= \lambda^2(p^2 + m^2)(A \sinh p + B \sin m) \end{aligned} \quad (17)$$

Macierz (16) uwzględnia charakterystyki dynamiczne elementu, takie jak częstość drgań ω i masę μ oraz uwzględnia wpływ odkształcalności postaciowej.

4 Ścisła analiza drgań własnych konstrukcji

W analizie drgań harmoniczných układów ciągłych stosujemy dyskretyzację matematyczną, która polega na aproksymacyjnym opisie stanu przemieszczenia w ograniczonej bazie parametrów, przy zachowaniu rzeczywistego rozkładu pola masowego μ . Modelem matematycznym procesu drgań harmoniczných swobodnych, zwanych drganiami własnymi jest równanie:

$$\mathbf{K}(\lambda)\mathbf{q} = 0 \quad (18)$$

gdzie $\mathbf{K}(\lambda)$ – globalna macierz sztywności dynamicznej analizowanego układu, powstała przez zsumowanie macierzy elementów konstrukcji \mathbf{K}^e , \mathbf{q} – wektor współrzędnych uogólnionych układu.

Drgania takie mogą się realizować przy częstościach będących uogólnionymi wartościami własnymi globalnej macierzy sztywności dynamicznej układu, a ich amplitudy mogą być wyznaczone jedynie z dokładnością do stałej. Trywialne rozwiązanie $\mathbf{q}=0$ nie odpowiada warunkom zadania, ponieważ odpowiada równowadze w stanie spoczynku. Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest spełnienie równania:

$$|\mathbf{K}(\lambda)| = 0 \quad (19)$$

z którego można wyznaczyć wartości λ , określające częstości drgań własnych ustroju:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} \quad (20)$$

a następnie częstotliwości drgań własnych:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (21)$$

Warunek (10) sprowadza się do rozwiązywania nieliniowego równania i przeprowadzone być musi numerycznie. W praktyce

inżynierskiej stosuje się rozwiązania przybliżone, wykorzystując metodę elementów skończonych.

5 Analiza przybliżona

Dokonując rozwinięcia ścisłej, w ramach przyjętych założeń, macierzy sztywności dynamicznej (16) w szereg potęgowy, względem parametru sterującego λ , otrzymamy odpowiednio: macierz sztywności liniowej i macierz bezwładności translacyjnej (pomnożoną przez częstość drgań własnych) stosowane w analizie konstrukcji smukłych:

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{12}{l} & 6 & -\frac{12}{l} & 6 \\ 6 & 4l & -6 & 2l \\ -\frac{12}{l} & -6 & \frac{12}{l} & -6 \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^2} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^e = \frac{\mu l^2}{420} \begin{bmatrix} \frac{156}{l} & 22 & \frac{54}{l} & -13 \\ 22 & 4l & 13 & -3l \\ \frac{54}{l} & 13 & \frac{156}{l} & -22 \\ -13 & -3l & -22 & 4l \end{bmatrix} \quad (23)$$

oraz macierze \mathbf{K}^{T^e} i \mathbf{M}^{T^e} uwzględniające wpływ odkształcalności postaciowej, które mają odpowiednio postać:

$$\mathbf{K}^{T^e} = \frac{36\zeta}{1+12\zeta} \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & 2 & -\frac{4}{l} & 2 \\ 2 & l & -2 & l \\ -\frac{4}{l} & -2 & \frac{4}{l} & -2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^2} \quad (24)$$

$$\mathbf{M}^{Te} = \frac{\mu l^2 \zeta}{70(1+12\zeta)^2} \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot (3+32\zeta)}{l} & (11+108\zeta) & -\frac{12 \cdot (3+32\zeta)}{l} & (11+108\zeta) \\ (11+108\zeta) & 2 \cdot (1+6\zeta) \cdot l & -(11+108\zeta) & 2 \cdot (1+6\zeta) \cdot l \\ -\frac{12 \cdot (3+32\zeta)}{l} & -(11+108\zeta) & \frac{12 \cdot (3+32\zeta)}{l} & -(11+108\zeta) \\ (11+108\zeta) & 2 \cdot (1+6\zeta) \cdot l & -(11+108\zeta) & 2 \cdot (1+6\zeta) \cdot l \end{bmatrix} \quad (25)$$

Pozostałe wyrazy rozwinięcia przedstawiają samo zrównoważone układy reakcji węzłowych o silnie malejących wartościach i mogą być pominięte bez obawy o niedokładność obliczeń, tak więc macierz sztywności dynamicznej (16) można w przybliżeniu przedstawić w postaci sumy:

$$\mathbf{K}^e(\lambda) \cong \tilde{\mathbf{K}}^e - \mathbf{K}^{Te} - \omega^2 (\tilde{\mathbf{M}}^e - \mathbf{M}^{Te}) \quad (26)$$

W analizie drgań harmoniczných konstrukcji za pomocą metody elementów skończonych, problem wyznaczania częstości drgań własnych sprowadza się do rozwiązania równania:

$$|\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}^T - \omega^2 (\tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}^T)| = 0 \quad (27)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{K}}$, \mathbf{K}^T , $\tilde{\mathbf{M}}$ i \mathbf{M}^T – są odpowiednio globalnymi macierzami sztywności i bezwładności translacyjnej analizowanego układu.

Jeżeli w równaniu (27) pominiemy macierze uwzględniające wpływ odkształcalności postaciowej otrzymamy warunek na wyznaczanie częstości drgań własnych konstrukcji smukłych.

6 Częstości drgań własnych belki swobodnie podpartej

W przypadku pryzmatycznej belki swobodnie podpartej, możliwe jest uzyskanie ścisłego wzoru określającego częstości drgań własnych. Warunkiem na to, aby funkcja ugięcia (10), opisywała równanie wygiętej osi belki swobodnie podpartej jest spełnienie następujących warunków brzegowych:

$$w(\xi=0)=0; \quad M(\xi=0)=0; \quad w(\xi=1)=0; \quad M(\xi=1)=0 \quad (28)$$

które prowadzą do układu jednorodnych równań na stałe całkowania:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ Ap & 0 & Bm & 0 \\ \cosh p & \sinh p & \cos m & \sin m \\ Ap \cosh p & Ap \sinh p & Bm \cos m & Bm \sin m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Zerowanie się wyznacznika podstawowego układu (29) jest warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań i jest spełnione dla:

$$m = k\pi; \quad k = 1, 2, 3... \quad (30)$$

Równanie (30), po wykorzystaniu (8)₂, prowadzi do określenia częstości drgań własnych:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k^4 \pi^4}{1 + k^2 \pi^2 \zeta}} \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} \quad (31)$$

Przyrównując we wzorze (31) parametr ζ do zera dostaniemy znany z literatury wzór na częstości drgań własnych dla belki Bernoulliego-Eulera.

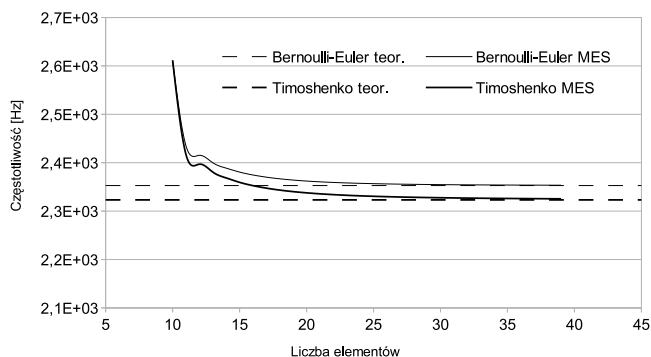
7 Weryfikacja numeryczna proponowanego podejścia

W rozdziale tym przeprowadzono ścisłą i przybliżoną analizę częstości drgań własnych dwóch belek podpartych swobodnie. Dane materiałowe w obu rozpatrywanych przypadkach były identyczne i równe: $E=2,1E11$ [Pa], $\nu=0,3$, $\rho=7800$ [kg/m³]. Na etapie analizy pracy konstrukcji metodą elementów skończonych wykorzystano język FORTRAN z numeryczną biblioteką IMSL dla rozwiązania rozszerzonego problemu wartości własnych. W celu znalezienia ścisłych rozwiązań wynikających z równania (19) wykorzystano środowisko Mathematica.

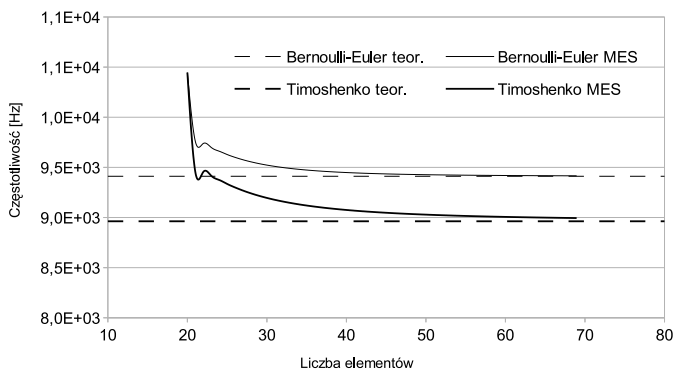
Przykład 1

Rozpatrzmy pryzmatyczną, smukłą belkę o długości $l=1$ [m] i o kwadratowym przekroju o wymiarze boku kwadratu 0,01 [m]. Wyniki obliczeń otrzymanych metodą elementów skończonych porównano ze ścisłymi rozwiązaniami wynikającymi ze wzoru (31) przy założeniu teorii Bernoulliego-Eulera i Timoshenki (w pracy przedstawiono częstotliwości drgań własnych – wzór (21)). Proces zbieżności 10-tej, 20-tej, 30-tej, 40-

tej częstotliwości drgań własnych ze względu na liczbę elementów skończonych pokazano na rysunkach 3, 4, 5 i 6. Przerywanymi liniami poziomymi zaznaczono odpowiednie wartości ściśle.



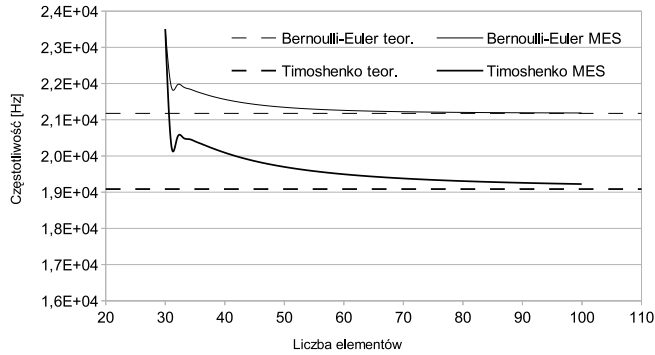
Rys. 3. Zbieżność rozwiązań MES do rozwiązań teoretycznych dla 10-tej częstotliwości drgań własnych



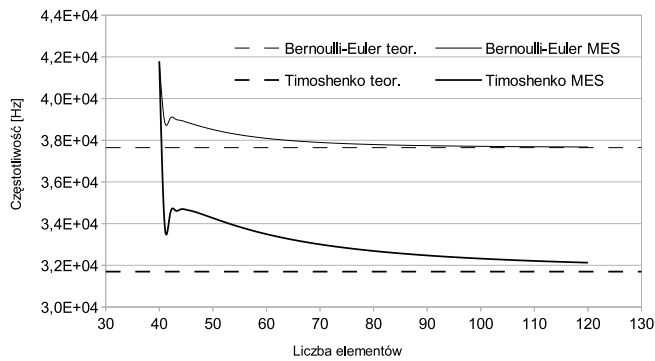
Rys. 4. Zbieżność rozwiązań MES do rozwiązań teoretycznych dla 20-tej częstotliwości drgań własnych

Na przedstawionych rysunkach wyraźnie widoczna jest zbieżność rozwiązań metody elementów skończonych do rozwiązań teoretycznych właściwych dla przyjętego modelu. Zbieżność dla modelu Bernoulliego-Eulera jest wyraźnie lepsza niż w przypadku modelu Timoshenki. Zakłócenia procesu zbieżności, widoczne na początkach wykresów, są konsekwencją błędów numerycznych pojawiających się dla zbyt małej, w stosunku do numeru częstotliwości, dyskretyzacji belki. W celu

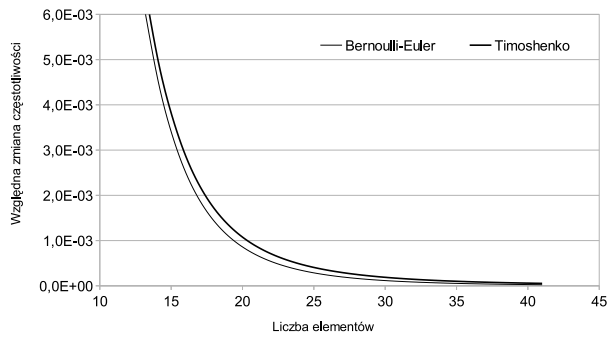
dokładniejszego zilustrowania procesu zbieżności rozwiązań MES na rysunkach 7, 8, 9 i 10 przedstawiono względną zmianę (dla omawianych, przykładowych częstotliwości) związaną ze zwiększeniem dyskretyzacji o jeden element skończony.



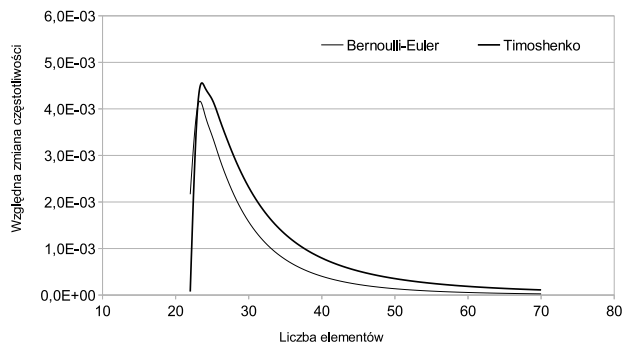
Rys. 5. Zbieżność rozwiązań MES do rozwiązań teoretycznych dla 30-tej częstotliwości drgań własnych



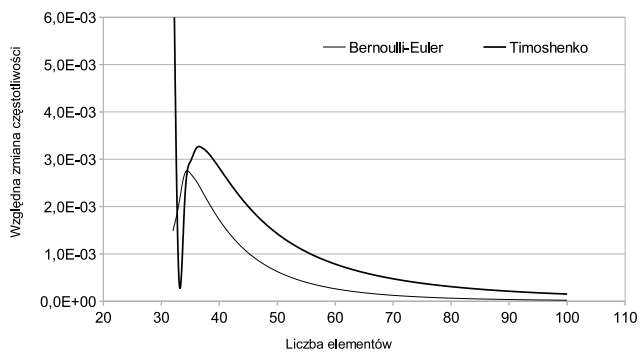
Rys. 6. Zbieżność rozwiązań MES do rozwiązań teoretycznych dla 40-tej częstotliwości drgań własnych



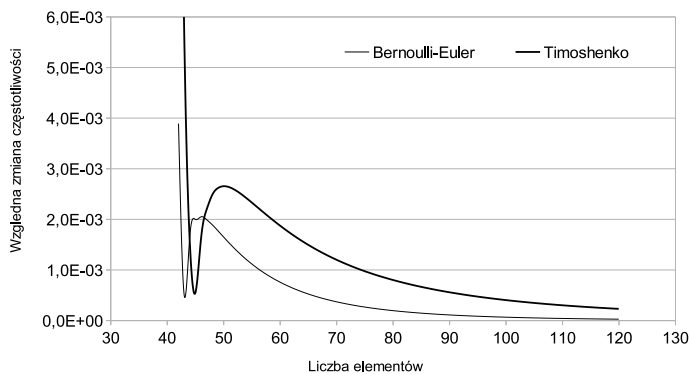
Rys. 7. Względna zmiana wartości 10-tej częstotliwości



Rys. 8. Względna zmiana wartości 20-tej częstotliwości



Rys. 9. Względna zmiana wartości 30-tej częstotliwości

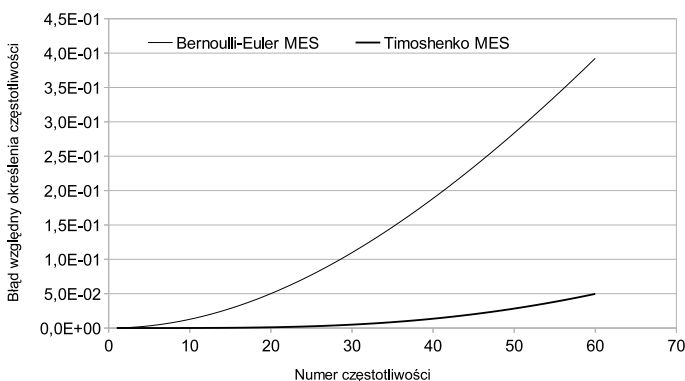


Rys. 10. Względna zmiana wartości 40-tej częstotliwości

Jeśli za umowną granicę stabilizacji procesu przyjąłbyśmy 1‰ to dla różnych przyjętych teorii zginania i różnych częstotliwości drgań własnych otrzymamy różną potrzebną dyskretyzację belki, którą przedstawiono w tabeli 1.

Tabela. 1. Umowna stabilizacja rozwiązania metody MES

Nr częstotliwości	10	20	30	40
Model				
Bernoulliego-Eulera	19	33	45	57
Timoshenki	21	38	56	74



Rys. 11. Błąd względny określenia częstości drgań własnych

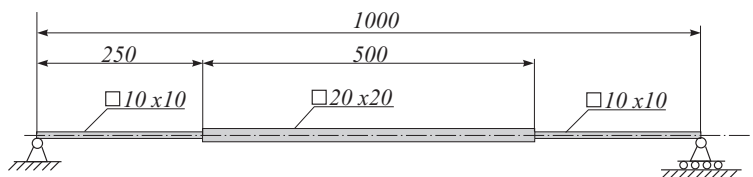
Należy zwrócić uwagę na duże rozbieżności wartości częstotliwości drgań własnych dla przyjętych teoretycznych modeli belek. Rozbieżność ta pogłębia się wraz z numerem częstotliwości własnej. Na rysunku 11 pokazano błąd względny pierwszych sześćdziesięciu częstotliwości własnych metody elementów skończonych dla obu teorii, mierzony

względem rozwiązań ścisłych dla teorii Timoshenki a otrzymany dla dyskretyzacji na 120 elementów skończonych.

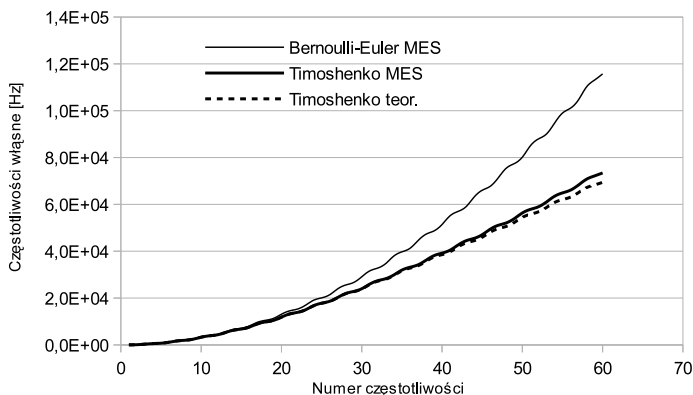
Jak pokazano na rysunku 11 błąd obliczenia częstotliwości drgań własnych, w przypadku zastosowania teorii Bernoulliego-Eulera, dla pierwszych 20 częstotliwości jest mniejszy od 5%. Dla kolejnych częstotliwości błąd ten rośnie osiągając dla sześćdziesiątej częstotliwości – 39%. Dla obliczeń MES według teorii Timoshenki błąd ten jest zawsze mniejszy od 5%. Konsekwentnie, w celu naliczenia wyższych częstotliwości drgań własnych, koniecznością jest stosowanie teorii Timoshenki nawet dla belek smukłych.

Przykład 2

Rozpatrzmy smukłą belkę o przekroju kwadratowym i skokowych zmianach przekrojów tak jak pokazano to na rysunku 12. Wymiary na rysunku są podane w milimetrach.



Rys. 12. Belka o zmiennym przekroju poprzecznym

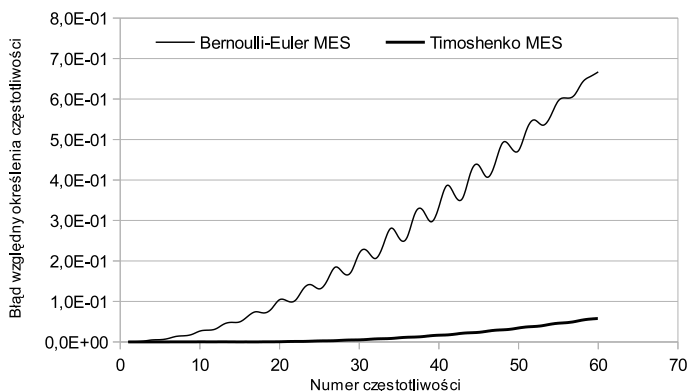


Rys. 13. Pierwszych sześćdziesiąt częstotliwości drgań własnych

Ścisłe rozwiązania, w ramach przyjętych założeń, dla pierwszych sześćdziesięciu częstości drgań własnych otrzymano rozwiązując numerycznie równanie (19), powstałe przez złożenie trzech macierzy (16) dla trzech, widocznych na rysunku 12, części belki. Proces rozwiązania równania został zautomatyzowany w programie

Mathematica tak, aby określić założoną liczbę częstotliwości drgań własnych. Analizę MES przeprowadzono dzieląc belkę na 120 równej długości elementów skończonych.

Na rysunku 13 przedstawiono pierwszych sześćdziesiąt obliczonych częstotliwości drgań własnych, a na rysunku 14 błąd względny, określenia tych częstotliwości metodą elementów skończonych, względem ścisłych rozwiązań teorii Timoshenki.



Rys. 14. Błąd względny określenia częstotliwości drgań własnych

Podobnie jak w poprzednim przykładzie określenie wyższych częstotliwości drgań własnych zgodnie z teorią Bernoulliego-Eulera jest obarczone dużym błędem sięgającym niemalże 67%. W przypadku teorii Timoshenki błąd ten nie przekroczył 6%.

8 Podsumowanie

W pracy wykazano stosowalność ścisłych rozwiązań do poszukiwania wyższych częstotliwości drgań własnych układów belkowych. Procedura ta może być zastosowana do bardziej złożonych konstrukcji prętowych takich jak ramy.

Numeryczna analiza pracy konstrukcji z wykorzystaniem metody elementów skończonych wykazała słabą przydatność teorii Bernoulliego-Eulera do wyznaczania wyższych częstotliwości drgań własnych nawet dla belek uważanych za smukłe.

9 Literatura

- [1] Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Soldatov, V., Krysko, V.A., *Analysis of the Nonlinear Dynamics of the Timoshenko Flexible Beams*

- Using Wavelets*, ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 7(1), 011005, 2012
- [2] Jang, T.S., Baek, H.S., Paik, J.K., *A new method for the non-linear deflection analysis of an infinite beam resting on a non-linear elastic foundation*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 46, 2011, pp 339–346
- [3] Zohoor, H., Kakavand, F., *Vibration of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams in large overall motion on flying support using finite element method*, Scientia Iranica B, 19(4), 2012, pp 1105–1116
- [4] Sedighi H.M., Reza A., *High precise analysis of lateral vibration of quintic nonlinear beam*, Latin American Journal of Solids and Structures 10, 2013, pp 441 – 452
- [5] Zhao J., Zhang L., *Damage Identification of a Beam-Like Structure Using Element Modal Strain Energies and Natural Frequencies*, Applied Mechanics and Materials, Vol. 94-96, 2011, pp 718-723
- [6] Gillich G., Praisach Z., *Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time–frequency analysis*, Signal Processing, 96, Part A, March 2014, pp 29–44
- [7] Dems K., Mróz Z., *Identification of damage in beam and plate structures using parameter dependent frequency changes*, Eng. Comp., (18), 1-2, 2001, pp 96-120
- [8] Dems K., Turant J., *Structural damage identification using frequency and modal changes*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 59(1), 2011, pp 27-32
- [9] Rucka M., *Damage detection in beams using wavelet transform on higher vibration modes*, Journal Of Theoretical And Applied Mechanics, 49, 2, 2011, pp 399-417
- [10] Abdo M., *Damage detection in plate-like structures using High-Order mode shape derivatives*, International Journal of Civil And Structural Engineering, 2, 3, 2012, pp 801-816
- [11] Whalen T. M., *The behaviour of higher order mode shape derivatives in damaged, beam-like structures*, Journal of Sound and Vibration, 309(3-5), 2008, pp 426-464
- [12] Pandey A.K., Biswas M., Samman M.M., *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 145(2), 1991, pp 321-332
- [13] Obara P., *Macierz sztywności dynamicznej ściskanego pręta Timoshenki – sprzężenie parametrów σ i λ* , Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, s.269-276, Gdańsk – Krynica 2006

- [14] Gilewski W., Gomuliński A., *Physical shape functions: a new concept in finite elements*, Finite Elements News 3, s. 20-23, 1990

STRICT AND APPROXIMATE ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOUR OF BEAM STRUCTURES USING FINITE ELEMENT METHOD

Summary: In this paper the dynamic analysis of beam structures was considered. The influence of shear deformation, according to Timoshenko theory, was taken into account. The analysis of higher order natural frequencies was carried out in strict and approximate manner for simply supported beam. Such an evolution shows how complex a discrete model should be to obtain similar results in comparison to the exact ones.

Keywords: higher natural frequency, finite element method