

Mirosław Zając
Politechnika Łódzka,
Instytut mechatroniki i Systemów Informatycznych
ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź
email: mirek21.mirek21@wp.pl

FILTRACJA KALMANA W TECHNICIE NA PRZYKŁADZIE URZĄDZENIA SST

Streszczenie – W artykule podjęto próbę opisu filtracji Kalmana zarówno dla zagadnień liniowych jak i nieliniowych. Omówiono linearyzację dla zagadnień nieliniowych, wykorzystano zgromadzone informacje do budowy praktycznej filtra Kalmana. Zbadano możliwość wykorzystania założeń teoretycznych w praktycznej realizacji dotyczącej urządzenia pomiarowego i badania właściwości magnetycznych ferromagnetyka przy wykorzystaniu SST.

Słowa kluczowe: filtracja, Kalman, element nieliniowy, linearyzacja

1 Wprowadzenie

W rozwiązaniach technicznych często zachodzi potrzeba zastosowania filtracji sygnału by dostosować go do kolejnego członu wykonawczego lub wykorzystać sygnał o określonych parametrach do sterowania bloku bądź urządzenia. Jeżeli jakiś sygnał ma być stosowany do sterowania innym urządzeniem bądź modułem to taki sygnał nie może być dowolny ale musi spełniać określone zadania postawione bądź założone w fazie projektowania, musi spełniać określone normy dotyczące np.: poziomu sygnału, stosunku sygnału do szumu itp. Aby zapewnić prawidłowe sterowanie i użycie sygnału do sterowania. Jeżeli sygnał nie odbiega zbyt od założeń projektowych to jest łatwy do wykorzystania we wspomniany wcześniej sposób, sprawa się komplikuje gdy np.: tylko częściowo spełnia warunki. Nie zawsze wtedy jest możliwość użycia innego sygnału do sterowania bądź wyłączenia na moment urządzenia by poczekać aż sygnał sam się ustabilizuje. Nie zawsze też charakter środowiska bądź sam projekt filtra pozwala na zastosowanie go w konkretnej dziedzinie czy problemie. Często i sam filtr musi być dostosowany do charakteru funkcji jaką ma pełnić. Znow jeżeli warunki pracy filtra nie zmieniają się w sposób ciągły i losowy to takie zmiany da się przewidzieć i zaprojektować odpowiedni filtr. Gorzej gdy zmiany mają

charakter losowy lub częściowo losowy, wtedy zwykły filtr nie da sobie rady w tak zmiennych warunkach pracy, konieczny jest taki, który będzie niejako sam dostosowywał się do zmiennych warunków zewnętrznych i nadal pełnił funkcje mu powierzone. Inną sprawą jest charakter zmian wielkości sterowanej czy to jest wielkość zmieniająca się liniowo czy nieliniowo. Wszystkie powyższe warunki i problemy zostały uwzględnione w filtracji Kalmana. Podstawowy filtr Kalmana jest przeznaczony dla problemów o charakterze zmian liniowej wielkości filtrowanej, dlatego gdy trzeba użyć filtru w procesie który z natury ma charakter nieliniowy konieczne jest wykorzystanie linearyzacji czyli przystosowania filtru do innego charakteru zjawisk bądź wartości wejściowych na których ma pracować (linearyzację opisano w dalszej części pracy). Jeżeli chodzi o zastosowanie filtracji Kalmana w dowolnym procesie to głównym warunkiem koniecznym jest możliwość opisanie odpowiednimi równaniami procesu. Niektóre procesy mogą być dość mocno wymagające jeśli chodzi o sposób ich matematycznego opisu. Odpowiednie narzędzia matematyczne pozwalają dość szczegółowo opisać stan bądź zmienność danego procesu. Tworząc opis matematyczny jednocześnie tworzymy model opisujący dane zjawisko bądź urządzenie. Logicznym wnioskiem jest, że jeżeli nie wiemy jak opisać coś co się zmienia to nie będziemy w stanie rozróżnić sygnału od szumu lub przewidzieć kolejnego stanu danego zjawiska, pozycji pracy urządzenia, co za tym idzie nie napiszemy odpowiedniego algorytmu filtrującego ani nie zbudujemy fizycznie filtru. Tu dochodzimy do ważnej informacji filtr Kalmana to tak naprawdę specjalnie napisany algorytm który umożliwia wybranie określonego sygnału z grupy sygnałów lub oddzielenie go z zakłóceń i przeprowadzenie na tym sygnale dalszych operacji matematycznych celem np. : wysterowania innego urządzenia. Aparat matematyczny który wykorzystuje się do wydzielenia sygnału, jego odpowiedniego wzmocnienia jeśli zajdzie potrzeba to głównie algebra bo działania opierają się na rachunku macierzowym i wektorach oraz szeroko pojęta wiedza ze statystyki. Całość ma służyć temu by przewidzieć kolejny ruch bądź zmianę wartości pomiarowej w trochę odmienny sposób niż klasyczne filtry, w klasycznych filtrach raczej nie przewiduje się co się wydarzy i nie dostosowuje się filtru do nadchodzących zmian. Dla tzw. filtru klasycznego zapisano ściśle określone wartości graniczne sygnału dla którego filtr pracuje to znaczy interpretuje względem tych wartości sygnał wejściowy i kwalifikuje go jako pożądaný bądź nie pożądaný, gdy zakwalifikuje jako nie pożądaný sygnał jest tłumiony lub wycinany. Wartości graniczne w takim filtrze rzadko się zmieniają, a pracujący układ jest najczęściej dość mocno zoptymalizowany względem sygnału poddawanego filtracji i względem tych wartości granicznych wyznaczających stan pracy układu. Filtr pracuje dobrze do chwili gdy sygnał podawany na układ zmieni odrobinę swój charakter wykraczając poza te z góry ustalone

granice. Wtedy optymalizacja działa na niekorzyść filtru bo albo układ odmawia pracy albo produkuje tak chaotyczne wyniki że nie nadają się one do dalszej współpracy z innymi układami. Filtr Kalmana minimalizuje tę niedogodność, nie oznacza że wszystko jedno co podamy na wejście układu, ale możliwość błędnej pracy i wskazań jest znacznie zminimalizowana względem podobnego układu filtra klasycznego. Jest to możliwe dlatego, że układ z filtrem Kalmana ma opisany model procesu i sam pomiar, a nie tylko warunki graniczne pomiaru. Zatem sposób podejścia do problemu filtracji jest znacząco różny od filtru o konstrukcji klasycznej. Taki sposób filtracji daje przewagę filtrowi Kalmana, odpowiednio zaprogramowany może w określonych granicach dostosowywać się do zmiennych warunków zewnętrznych, co ważne bez utraty znacznej funkcjonalności, a odpowiednio rozbudowany filtr może nawet korygować swą pracę względem innych sygnałów mierzonych i wciąż dawać poprawny wynik pomiaru mimo zmian sygnału mierzonego (filtrowanego). Uzyskanie takiej pracy w układzie filtra klasycznego jest znacznie utrudnione o ile w ogóle możliwe, przykład: wzmocnienie w zwykłych filtrach jest z reguły stałe i jasno określone przez konkretną charakterystykę natomiast filtr Kalmana posiada zmienne wzmocnienie. Potrafi dostosowywać wartość współczynnika wzmocnienia sygnału według założonego algorytmu, w zależności od potrzeby to wzmocnienie jest dostosowywane w zależności od warunków pracy odpowiednio by zagwarantować poprawny pomiar. Sam algorytm logicznie przypomina trochę tok decyzyjny człowieka. Analizując działanie filtru zwykłego jeśli mu podać na wejściu sygnał to filtr podejmie pracę i obojętnie wszystko co nie pasuje do z góry założonej w fazie projektowania charakterystyki pasma przenoszenia. Filtr zajmuje się jedynie dostosowaniem sygnału do wzorca zbliżonego do wymogów opisanych krzywą przenoszenia filtru nie interesuje go co na wyjściu otrzymuje, po prostu działa. Podsumowując dla tego typu filtru będzie wszystko jedno czy na wyjściu będzie podawany sygnał o poprawnych parametrach (w założeniu będzie zawsze poprawny bo układ dostosowany był do określonych sztywnych warunków), czy też nie. W Filtrze Kalmana jest zupełnie inaczej. Sygnał pomiarowy ma wpływ na wewnętrzne podukłady filtru, a w efekcie filtr ten dostosowuje się w określonych granicach do sygnału i jego charakterystyki, dzięki temu ma możliwość lepszego dopasowania się do zmiennych warunków sygnałowych, tak by wykonać jak najlepiej założoną filtrację lub założony pomiar. Mało tego sam algorytm i struktura filtru pozwalają by filtr mierzył sygnał bądź sygnały pomocnicze brane pod uwagę w fazie projektowania filtru, w ten sposób nie tylko bada sygnał, ale też niejako rozumie co zrobić by dostosować się do zmian sygnału wejściowego. Te dodatkowe sygnały pozwalają na dodatkowe wewnętrzne dostosowanie się układu by na wyjściu uzyskać sygnał w założonej tolerancji. Żeby zobrazować działanie algorytmu Kalmana

można porównać sytuację dostosowywania parametrów filtra podczas filtracji do sytuacji kiedy człowiek mierzy długość danego elementu, za każdym razem gdy dokonuje się pomiar człowiek ma lub dostosuje pomiar do swoich potrzeb zgodnie z wymaganą dokładnością oczywiście o ile ma odpowiedniej dokładności przyrządy pomiarowe by ten pomiar dokonać. Podobnie człowiek jeśli ma wynik pomiaru uzyskać w metrach to używa do pomiaru przymiaru wyskalowanego w metrach mimo, że jednocześnie może mieć dostęp, a nawet używać urządzenia mierzącego długość w wielu jednostkach i z różną dokładnością w tym samym czasie. Decyzję co wybrać podejmuje człowiek zgodnie ze swoim logicznym algorytmem poszukiwania rozwiązania optymalnego mimo, że my nie zawsze możemy być tego świadomi sam mózg dokonuje często optymalizacji za nas decydując jak wykonać dany ruch lub czynność. Filtr Kalmana działa analogicznie jeśli ma do dyspozycji kilka sygnałów oraz opis w jaki sposób je powiązać może dostosować swą pracę w taki sposób że ma ona wpływ na wynik końcowy np.: z kilku sygnałów o różnej dokładności można uzyskać większą dokładność jeśli wie się jak sygnały ze sobą oddziałują. Tak się dzieje np.: w przypadku sterowania wysokością samolotu sterowanego automatycznie jeśli wymagana jest precyzja i napisano odpowiedni algorytm autopilot uwzględni wszystkie sygnały mogące poprawić dokładność wskazań, a zatem i jakość sterowania się poprawi. Filtr może przewidzieć wynik na podstawie wcześniejszych pomiarów oraz zoptymalizować swą pracę, dostosowując wzmocnienie do konkretnej sytuacji. Taki tryb praktycznie gwarantuje lepsze wyniki niż klasyczne rozwiązania. Patrząc na dziedzinę automatyki gdyż głównie tam stosuje się filtr Kalmana jako element sterowania można stwierdzić, że filtr Kalmana jest optymalnym estymatorem stanu gdyż w pewnych warunkach może on spełniać pewne założone kryterium np. minimalizacji błędu średniokwadratowego estymowanych parametrów (błąd średniokwadratowy - mówi, o ile estymator różni się od wielkości, którą ma estymować). W tym wypadku filtr podczas pracy bierze pod uwagę wszystkie dostępne pomiary oczywiście te, które były uwzględnione podczas fazy projektowania filtra i bez względu na ich precyzję, dokładność dokonuje najlepszej estymacji stanu czyli oszacowuje najdokładniej jak się da. Cały szereg obliczeń wykonywany jest wewnątrz filtra sukcesywnie, filtr nie przechowuje wszystkich pomiarów z przeszłości, ma jedynie wgląd w ograniczoną ich liczbę. Liczbę tych pomiarów ustala się w fazie projektowania. Na tej określonej porcji danych dokonuje obliczeń i bazując na podstawie wyniku z poprzedniego kroku wyznacza wartość nową. Zaletą filtra jest to, że nie ma potrzeby przeliczania wszystkich danych za każdym razem od nowa, część danych wstecz wraz z nowymi do których ma dostęp algorytm w zupełności wystarcza do przewidzenia kolejnego stanu urządzenia bądź procesu i w razie potrzeby zaktualizowania wzmocnienia filtra. Ciekawą i po-

ręczną cechą filtru jest to, że każdy problem lub pomiar można sprowadzić do postaci czarnej skrzynki, mając dane wejścia i wyjścia systemu można uzyskać dane niedostępne (niemierzalne) na podstawie dostępnych mierzalnych danych pochodzących np.: z sensorów. W tym wypadku warto wspomnieć o tzw. obserwowalności układu, która jest istotna dla zastosowania filtru. Jest to krytyczny warunek stosowalności filtru Kalmana gdyż jeśli układ jest nie obserwowalny to nie da się zastosować do niego równań filtru Kalmana (więcej na ten temat w podstawach matematycznych).

2 Matematyczne podstawy filtracji

Wyjaśnijmy pojęcie obserwowalności. Obserwowalność decyduje o możliwości przeprowadzenia obserwacji (mierząc wielkości na wyjściach układu). Jeżeli stan lub układ nie jest obserwowalny to regulator (lub filtr) nigdy nie będzie w stanie określić zachowania takiego stanu lub układu co spowoduje, że stabilizacja bądź filtrowanie takiego sygnału przy pomocy filtru Kalmana będzie nie możliwe. Jednakże, podobnie jak w przypadku warunków stabilizacji (dla sterowalności) - jeśli stan nie jest obserwowalny to jednak może być wykrywalny.

Dla układu dyskretnego opisanego równaniami [1]:

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (1)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \quad i \in Z_+ = \{0,1,2,\dots\} \quad (2)$$

gdzie $x_i \in R^n$ i jest wektorem stanu, czyli opisuje np. punkty pomiarowe stanowiące o kolejnych stanach układu, $u_i \in R^m$ i $y_i \in R^p$ są odpowiednio wektorem wymuszenia (wejścia) oraz odpowiedzi (wyjścia), $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$. Prawdziwe są poniższe definicje dotyczące obserwowalności układu.

Stan początkowy x_0 należy do R^n układu nazywamy obserwowalnym w q krokach, jeżeli na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, y_q\}$ można wyznaczyć jednoznacznie stan x_0 tego układu [1].

Kolejna definicja również dotycząca obserwowalności układu. Układ opisany równaniami (1, 2) nazywamy obserwowalnym jeśli istnieje liczba naturalna q taka, że na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ można wyznaczyć jednoznacznie każdy stan początkowy x_0 należy do R^n tego układu [1].

3 Filtracja Kalmana liniowa

W filtracji Kalmana ważne są dwa równania podstawowe : pierwsze nazywane jest równaniem stanu , drugie równaniem procesu pomiaru lub modelu pomiaru. Równanie stanu opisuje dynamikę procesu, a równanie obserwacji uwzględnia występowanie szumu najczęściej o rozkładzie Gaussowskim, który występuje podczas dokonywania pomiarów.

Równania dla liniowego filtru Kalmana mają postać [11]:

$$x_{k+1} = F_{k+1,k}x_k + \omega_k \quad (3)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4)$$

gdzie (3) to równanie procesu, (4) to równanie obserwacyjne z względu na zmienną y , $k=1,2,3\dots$ dyskretny pseudo czas, x_k , y_k zmienne losowe n oraz p wymiarowe odpowiednio, $F_{k+1,k}$, H_k - macierze o wymiarach $n \times n$ oraz $p \times n$, $p \leq n$, o wyrazach rzeczywistych, ω_k , v_k - n oraz p - wymiarowe niezależne zmienne losowe o rozkładzie gaussowskim i charakterystykach [11]:

$$E(\omega_k) = 0, E(v_l) = 0 \quad (5)$$

$$E(\omega_k \omega_l^T) = Q_k \delta_{kl} \quad (6)$$

$$E(v_k v_l^T) = R_k \delta_{kl} \quad (7)$$

dla $l=1,2,\dots, \delta_{kl}=1$ jeżeli $k = l$, $\delta_{kl} = 0$ jeżeli $k \neq l$, ω_k , v_l są nieskorelowane. W przedstawionym modelu czyli tak naprawdę równaniach (3, 4) zadanie filtracji dyskretnego procesu stochastycznego x polega na wyznaczeniu estymatora \hat{x}_k dla x_k minimalizującego błąd średniokwadratowy estymacji o zapisie :

$$E(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T \quad (8)$$

Przy czym x_0 jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, o wartości oczekiwanej:

$E(x_0) = \bar{x}_0$ i macierzy kowariancji :

$$E(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T = \Sigma_0 \quad (9)$$

o ile dany jest zbiór obserwacji procesu $y: Y(k) = \{y_1, y_2, y_k\}$.

Algorytm filtracji w filtrze realizowany jest przez komplet równań, zaproponowanych przez R.E. Kalmana (od jego nazwiska pochodzi nazwa filtru) [10]. Zbiór tych równań nazywany jest filtrem Kalmana. Równania opisują kolejno:

estymator wektora stanu 'a priori' [11]:

$$\hat{x}_k^- = F_{k,k-1}(\hat{x}_{k-1}) \quad (10)$$

macierz kowariancji błędów estymacji a priori [11]:

$$P_k^- = F_{k,k-1}P_{k-1}F_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (11)$$

macierz wzmocnienia Kalmana:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (12)$$

Wzór (12) można zapisać jako:

$$K_k = \frac{P_k^- H_k^T}{H_k P_k^- H_k^T + R_k} \quad (12')$$

estymator wektora stanu a posteriori, po uwzględnieniu obserwacji y_k [11]:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_k^-)] \quad (13)$$

macierz kowariancji błędów estymacji a posteriori [11]

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (14)$$

Dla zainicjowania obliczeń przyjmuje się wartość początkową dla [11]:

$$\hat{x}_0 = E(X_0) = \bar{x}_0 \quad (15)$$

to jest wartość estymatora zmiennej losowej x_0 równą jej wartości oczekiwanej oraz błąd jej estymacji równy jej wariancji

$$P_0 = \Sigma_0 \quad (16)$$

Drugą istotną informacją jest to, że działanie filtru Kalmana można podzielić na dwie fazy: predykcję oraz uaktualnianie. Faza predykcji służy wyznaczaniu aktualnego wektora stanu na podstawie wcześniejszego stanu. W fazie uaktualniania uaktualniane są dane obserwacyjne i poprawiany jest wyznaczany wektor stanu (filtr aktualizuje wagi macierzy wzmocnienia). W podstawowej wersji filtr Kalmana nadaje się do rozwiązywania problemów o charakterystyce

liniowej czyli np.: przyrost prędkości lotu samolotu poruszającego się ruchem jednostajnym, filtr jednak można też stosować do problemów mających nieliniową charakterystykę wtedy używa się tzw. rozszerzonego filtru Kalmana (EKF).

4 Linearyzacja układów nieliniowych

Nieliniowe problemy można linearyzować to znaczy nadawać im pseudo liniowy charakter. To znaczy zapewnić liniowość na potrzeby obliczeń lub sterowania, a nie zmieniać konstrukcję urządzeń bądź charakter zjawiska obserwowanego. Do linearyzacji można wykorzystać trzy metody, uzyskuje się wtedy tzw. zawansowany filtr Kalmana lub inaczej EKF (opisany dalej w pracy). Trzeba też wyraźnie zaznaczyć, że każda linearyzacja układu nieliniowego jest jedynie jego przybliżeniem tak dokładnym jak się da, ale jest to tylko przybliżenie. Takie liniowe przybliżenie powinno zatem możliwie dobrze odzwierciedlać charakter układu lub zjawiska (właściwości statyczne i dynamiczne układu). Jako, że jest to jeden z ważniejszych elementów zastosowania filtracji Kalmana i niejako pozwala on na poszerzenie zastosowań tego typu filtru zostaną tu omówione trzy rodzaje uzyskiwania liniowości układów nieliniowych.

Linearyzację można uzyskać trzema sposobami:

- metoda rozwinięcia w szereg
- metoda linearyzacji optymalnej
- metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego

Z racji, że sama linearyzacja nie jest tematem artykułu, ale jest istotna dla działania filtru z wymienionych sposobów linearyzacji zostanie opisany jeden poniżej.

Metoda rozwinięcia w szereg

Metoda ta polega na rozwinięciu prawych stron równań stanu opisujących układ nieliniowy w szereg Taylora i pominięciu członów nieliniowych tego rozwinięcia. Przykład:

Jeśli mamy układ opisany równaniami [1]:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = x_0 \quad (17)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (18)$$

gdzie $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$ są odpowiednio wektorami: stanu, wymuszenia, odpowiedzi, a [1]

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ g_2(x, u, t) \\ \vdots \\ g_n(x, u, t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

są nieliniowymi funkcjami wektorowymi różniczkowalnymi ciągle względem wektorów x, u . Załóżmy, że (x_u, u_u, y_u) są przyjętym punktem pracy układu czyli zapisujemy [1]:

$$\dot{x}_u = f(x_u, u_u, t), \quad y_u = g(x_u, u_u, t) \quad (20)$$

lub punktem równowagi ($f(x_u, u_u) = 0$). Dodatkowo [1]

$$\Delta x = x - x_u, \quad \Delta u = u - u_u, \quad \Delta y = y - y_u \quad (21)$$

Są odpowiednio małymi odchyleniami wektorów stanu, wymuszenia i odpowiedzi od ich wartości ustalonych. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że [1]

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_u = \dot{x} - f(x_u, u_u, t) \quad (22)$$

oraz rozwijając w szereg Taylora prawe strony równań (17, 18) w bliskim otoczeniu punktu (x_u, u_u) otrzymamy [1]

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_u = \dot{x} - f(x_u, u_u, t) = \frac{\partial f}{\partial x}_{x=x_u, u=u_u} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}_{x=x_u, u=u_u} \Delta u + R_f(x, u, t) = A(t) \Delta x + B(t) \Delta u + R_f(x, u, t) \quad (23)$$

$$\Delta y = y - g(x_u, u_u, t) = \frac{\partial g}{\partial x}_{x=x_u, u=u_u} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}_{x=x_u, u=u_u} \Delta u + R_g(x, u, t) = C(t) \Delta x + D(t) \Delta u + R_g(x, u, t) \quad (24)$$

Wyrazy we wzorach: $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ są to macierze zależne od czasu t i zapisujemy je jako [1]:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}_{x=x_u, u=u_u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{n=n_x \\ u=u_u}} \quad (25)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\substack{n=n_u \\ u=u_u}} \quad (26)$$

$$C(t) = \frac{\partial g}{\partial x_{k=x_u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{k=x_u \\ u=u_u}} \quad (27)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{k=x_u \\ u=u_u}} \quad (28)$$

$R_f(x, u, t)$ oraz $R_g(x, u, t)$ są nieliniowymi członami rozwinięć spełniającymi warunki [1]:

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|R_f(x, u, t)\|}{\|\Delta x\|} &= 0, & \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|R_f(x, u, t)\|}{\|\Delta u\|} &= 0 \\ \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|R_g(x, u, t)\|}{\|\Delta x\|} &= 0, & \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|R_g(x, u, t)\|}{\|\Delta u\|} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

W przypadku gdy mamy do opisu układ nieliniowy stacjonarny oraz f i g jawnie zależą od czasu t , to macierze: $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ są stałe niezależnie od czasu czyli $A(t)=A$, $B(t)=B$, $C(t)=C$, $D(t)=D$.

Po obliczeniach i podstawieniu otrzymujemy układ liniowy [1]:

$$\Delta \dot{x} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u, \quad \Delta y = C(t)\Delta x + D(t)\Delta u \quad (30)$$

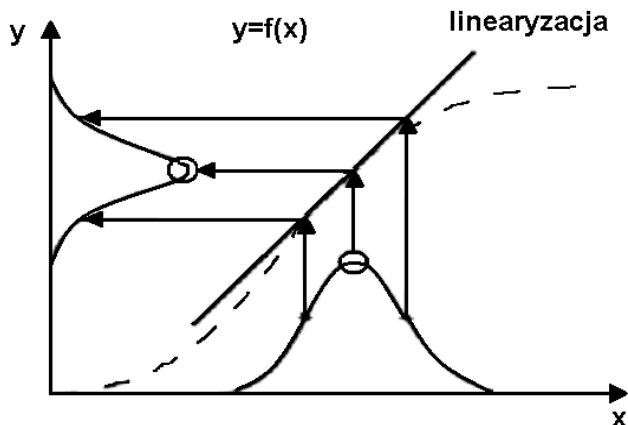
Widać, że pominięte zostały człony nieliniowe oraz równania te można zapisać w postaci [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (31)$$

otrzymaliśmy zapis liniowego przybliżenia układu nieliniowego.

Warto zauważyć że taki uproszczony zapis można przyjąć za poprawny w przypadku gdy przyjmiemy, że x , u , y oznaczają małe odchylenia wektorów od ich wartości ustalonych. Patrząc na ten zapis można skojarzyć podobieństwo do równania prostej w postaci: $y=ax+b$.

Graficznie linearyzację można przedstawić poniższym rysunkiem.



Rys. 1. Przedstawia działanie filtra EKF do linearyzacji nieliniowego stanu układu z wykorzystaniem rozkładu Gaussa próbek (kowariancja i średnia z takiego rozkładu wykorzystywane są do linearyzacji przebiegu funkcji).

5 Rozszerzony filtr Kalmana

Równania dla rozszerzonego filtra Kalmana pozwalają na analizę nieliniowego dyskretnego układu dynamicznego [11]:

$$x_{k+1} = f_{k+1}(x_k) + \omega_k \quad (32)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (33)$$

gdzie: $f_{k+1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ - funkcje o argumentach i wartościach wektorowych, nieliniowe, nielosowe, mające ciągłe pierwsze pochodne.

Proces filtracji polega w tym modelu (równania 33, 34) na wyznaczeniu kolejno wielkości:

estymatora wektora stanu 'a priori':

$$\hat{x}_k^- = f_k(\hat{x}_{k-1}) \quad (34)$$

przybliżenia macierzy kowariancji błędów estymacji 'a priori' [11]:

$$P_k^- = F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (35)$$

macierzy wzmocnienia Kalmana [11]:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (36)$$

estymator wektora stanu a posteriori, po obserwacji y_k :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_k^-)] \quad (37)$$

przybliżenie macierzy kowariancji błędów estymacji 'a posteriori' [11]:

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (38)$$

$$F_{k+1, k} = \left[\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \right]_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} \Big|_{x = \hat{x}_k} \quad (39)$$

oraz dla $h = \{h^1, \dots, h^p\}$

$$H_k = \left[\frac{\partial h^i(x)}{\partial x^j} \right]_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, p} \Big|_{x = \hat{x}_k} \quad (40)$$

są macierzami linearyzacji równań (33, 34) z pominięciem reszty wzoru Taylora (szerzej linearyzację opisano we wcześniejszej części artykułu).

6 Zastosowanie praktyczne

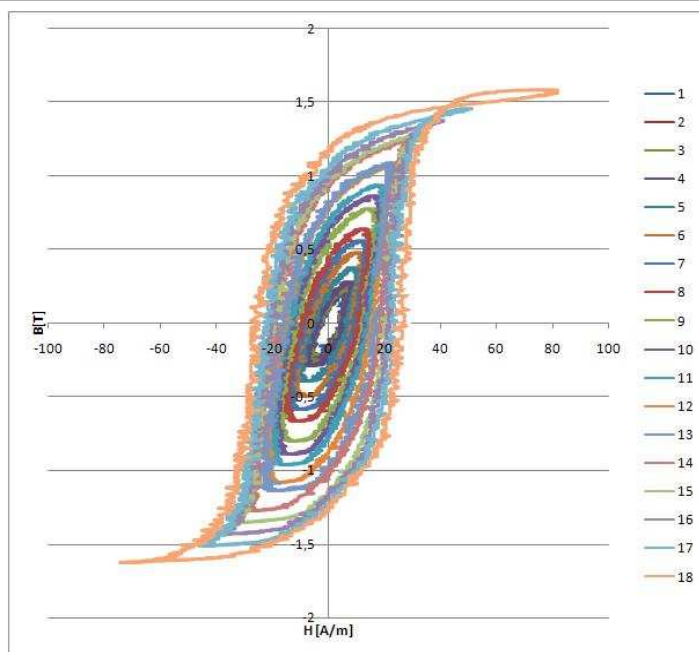
Filtr Kalmana znalazł zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i przemysłu np. w: elektronice, zarządzaniu energią w pakietach bateryjnych [6, 7], robotyce [2], automatyce [8], przetwarzaniu sygnałów medycznych (ECG) [3], inżynierii dźwięku, obrazu przestrzennego [2], inżynierii budownictwa do aktywnego tłumienia drgań [5], popularnie określanego VR (Virtual Reality) [2], systemach kontroli toru poruszania się [2, 8], GPS [4], samolotach, autopilotach [9] itp.. Jak widać dziedzin gdzie zastosowano filtrację Kalmana jest całkiem sporo, nie wymieniono tu wszystkich. Do wymienionych zastosowań można dołożyć kolejne opisane poniżej.

Wykorzystując wiedzę teoretyczną udało się stworzyć praktyczny przykład pokazujący działanie algorytmu Kalmana zaimplementowanego do filtracji napięcia sinusoidalnego pochodzącego z doświadczalnego układu służącego badaniu własności magnetycznych ferromagnetyków. W układzie tym problemem były zakłócenia, które uniemożliwiały praktyczny pomiar. Dzięki wykorzystaniu algorytmu Kalmana udało się zmniejszyć wpływ zakłóceń na wynik badania, a co za tym idzie użyteczność samego algorytmu została potwierdzona praktycznie.

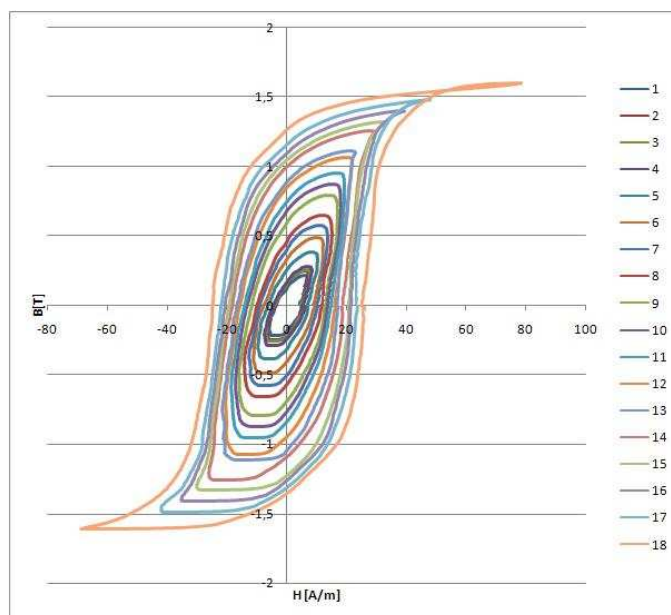
Poniżej przedstawiono algorytm Kalmana zaimplementowany w kodzie Matlaba.

```
% W dane wejściowe:
W=dane(1:1000,2);
D = size(W,2);% wymiar W
L = size(W,1);% długość W
% wyjście układu:
S =[];
% H jest praktycznie to samo co macierz D:
H = eye(D);
T = eye(D);
% inicjalizacja
p = H*W(1,:);
P = eye(D)*10; % wartości początkowe
Q = eye(D);
R = eye(D)*120;
% pętla :
for i=2:L,
% krok estymacji:
p_est = T*p;
P_est = T*P*T'+Q;
% korekcja:
K = P_est*H'*inv(H*P_est*H'+R);
p = p_est + K*( W(i,:) - H*p_est );
P = (eye(D) - K*H)*P_est;
S = [S p];
S = S';
subplot(2,1,1);
plot(W(2:length(W),:));
subplot(2,1,2);
% wyświetlenie wyniku
plot(S);
```

Rysunki 2 i 3 prezentują kolejno dane pochodzące z urządzenia pomiarowego. Na Rysunku 2 pokazano nie filtrowane przebiegi na których widać charakterystyczne postrzępienia pętli histerezy magnetycznej. Na kolejnym rysunku zastosowano filtrację Kalmana i uzyskano wynik pokazany na Rysunku 3. Widać, że znacznie poprawiła się czytelność prezentowanych wyników co spowodowane jest to tym że udało się odfiltrować zakłócenia powstające podczas pomiarów.



Rys. 2. Pętla histerezy materiału magnetycznego zmierzona w układzie SST, bez filtracji.



Rys. 3. Pętla histerezy materiału magnetycznego zmierzona w układzie SST, utworzona z wykorzystaniem filtracji Kalmana.

7 Wnioski

W prezentowanym artykule udało się zaimplementować algorytm filtracji sygnału oraz sam pomysł filtracji zaprezentowany w 1960 roku przez R. Kalmana, do kolejnego zastosowania praktycznego. Okazuje się, że przedstawione kiedyś założenia teoretyczne pozwalają na tak ogromną liczbę zastosowań, że do dziś powstają nowe rozwiązania oparte na tych założeniach. Założenia niestety choć proste z natury, niestety wymagają dość pokaźnej wiedzy matematycznej podczas ich implementacji, ale za to uzyskany efekt wynagradza trud włożony w stworzenie modelu matematycznego opisującego zjawisko lub układ poddawany filtracji. Uzyskane wyniki są często lepsze niż możliwe do uzyskania innymi sposobami filtracji. Zaprezentowane rozwiązanie może się okazać pomocne dla innych poszukujących niestandardowych sposobów filtracji sygnału gdyż zawiera nie tylko gotowe rozwiązanie dopasowane do konkretnego zagadnienia, ale też zawiera dość dużą część teorii niezbędną do implementacji.

8 Literatura

- [1] Kaczorek T., *Podstawy teorii sterowania*,
- [2] Salih Y., Malik Aamir S., *3D Object Tracking Using Three Kalman Filters*, Computers & Informatics (ISCI), (2011) IEEE Symposium, pp: 501-505
- [3] Vullings R., de Vries B., Bergmans Jan W. M., *An Adaptive Kalman Filter for ECG Signal Enhancement*, IEEE Transactions On Biomedical Engineering, Vol. 58, No. 4, (2011), pp:1094-1103
- [4] Wei Z., Dongli F., Jinzhong Y., *Adaptive Kalman Filtering Method to the Data Processing of GPS Deformation Monitoring*, Information Technology and Applications (IFITA), 2010, International Forum (Vol. 1), pp: 288-292
- [5] Przychodzki M., Lewandowski R., *Neuronowy filtr Kalmana w aktywnej redukcji drgań konstrukcji budowlanych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 258, (2008)
- [6] Vasebi A., Partovibakhsh M., Mohammad Taghi Bathaee S., *A novel combined battery model for state-of-charge estimation in lead-acid batteries based on extended Kalman filter for hybrid electric vehicle applications*, Journal of Power Sources 174 (2007), pp: 30–40
- [7] Plett G. L., *Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs Part 1. Background*, Journal of Power Sources 134 (2004), pp: 252–261

- [8] Reid Robert E., Kemal Tugcu A., Mears Barry C., *The use of wave filter design in Kalman filter state estimation of the automatic steering problem of a tanker in a seaway*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-29, No. 7, (1984), pp: 577-584
- [9] Kallstrom C. G., Astrom K. J., Thorell N. E., Eriksson J., Sten L, *Adaptive Autopilots for Tankers*, Automatica, (1979) Vol. 15, pp: 241-254
- [10] Kalman R. E., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, 82 (Series D), pp: 35-45.
- [11] Grewal Mohinder S., Andrews Angus P., *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab*, John Wiley & Sons, Inc. (2001).

KALMAN FILTERING TECHNIQUE ON THE SST EXAMPLE OF A DEVICE

Summary – It is an attempt to describe the Kalman filter both for linear and non-linear. The linearization for nonlinear phenomenon was discussed, and information were used to build practical Kalman filter.

Keywords: Kalman filtration, a non-linear objects, linearization