

Paweł Rembelski

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki

email: rembelski@pjwstk.edu.pl

ZBIEŻNOŚĆ PUNKTOWA DYSKRETNEGO ALGORYTMU MRÓWKOWEGO WYNIKI PRAKTYCZNE

Streszczenie - W artykule prezentujemy Dyskretny Algorytm Mrówkowy (DAS), będący modyfikacją klasycznego systemu mrówkowego sformułowanego przez M. Dorigo. Przedstawiamy kolejno definicję problemu optymalizacyjnego oraz podajemy szczegółowy opis składowych reguł działania metody DAS. Następnie wprowadzamy pojęcie algebraicznego modelu probabilistycznego dla opisu procesu ewolucji rozważanej heurystyki w ujęciu łańcuchów Markowa. Finalnym rezultatem pracy jest ustalenie zbieżności punktowej dyskretnego algorytmu mrówkowego oraz prezentacja wstępnych wyników praktycznych.

1 Wstęp

Celem artykułu jest przedstawienie wyników teoretycznych oraz rezultatów eksperymentów obliczeniowych dotyczących zbieżności punktowej jak i praktycznej efektywności **Dyskretnego Algorytmu Mrówkowego (DAS)**, które to rezultaty nie znajdują analogi w literaturze przedmiotu [6,7]. Zastosowany w pracy sposób analizy zachowań ewolucyjnych algorytmów probabilistycznych bazuje na wynikach znanych z analizy asymptotyki prostego algorytmu genetycznego zawartych w [9,13], które z kolei korzystają z podejścia używanego dla stochastycznych układów dynamicznych [8,12].

Artykuł składa się z dwóch integralnych części. W pierwszej z nich (rozdziały II-IV) wprowadzamy niezbędne założenia i własności dotyczące kolejno przyjętej definicji problemu optymalizacyjnego, schematu działania dyskretnego algorytmu mrówkowego oraz modelu teoretycznego tejże metody heurystycznej. W drugiej części (rozdziały V-VII) przedstawiamy aktualne rezultaty prac badawczych ukierunkowane na wykazanie punktowej zbieżności analizowanego algorytmu oraz wstępne wyniki eksperymentów obliczeniowych. Ostatecznie wyzna-

czamy kierunki przyszłych działań badawczych autora (aspekt teoretyczny i praktyczny) w przedmiotowej dziedzinie.

2 Problem optymalizacyjny

Przez *problem optymalizacyjny* będziemy rozumieli piątkę

$$(\Sigma, \mathfrak{R}, \Delta, \|\cdot\|, [\downarrow], [\uparrow])$$

gdzie kolejno:

$\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – skończony zbiór n indeksowanych **symboli**,

$\mathfrak{R} \subset \Sigma^*$ – skończony zbiór r indeksowanych **słów-rozwiązań** $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$,

$\Delta: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ – funkcja **akceptacji słowa** taka, że

$$\Delta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gd}y \exists \omega' \in \Sigma^*, \omega'' \in \mathfrak{R} : \omega\omega' = \omega'' \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$\|\cdot\|: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ – **funkcja oceny** jakości słowa-rozwiązania,

$[\downarrow] \mid [\uparrow]$ – **kierunek optymalizacji**, \downarrow dla minimalizacji oraz \uparrow dla maksymalizacji.

Bez straty ogólności rozważań w dalszej części pracy będziemy zakładali minimalizację funkcji oceny w dziedzinie liczb rzeczywistych dodatnich.

Teraz niech ω^* oznacza słowo-rozwiązanie *optymalne*, tj. takie rozwiązanie problemu optymalizacyjnego, że prawdziwy jest następujący warunek

$$\forall 1 \leq i \leq r : \|\omega_i\| \geq \|\omega^*\|$$

Następnie w zbiorze wszystkich słów-rozwiązań \mathbf{R} wyznaczam podzbiór $\mathbf{R}^* \subseteq \mathbf{R}$ *słów-rozwiązań optymalnych*. Celem obliczeniowym nad rozważanym problemem optymalizacyjnym, czyli *zadaniem optymalizacyjnym* w przestrzeni dyskretnej Σ^* jest znalezienie **dowolnego** optymalnego słowa-rozwiązania $\omega^* \in \mathbf{R}^*$.

W tym miejscu warto zauważyć, że przyjęty sposób interpretacji problemu optymalizacyjnego oparty o zbiór indeksowanych symboli Σ oraz zbiór indeksowanych słów-rozwiązań \mathbf{R} jest wystarczająco uniwersalny w odniesieniu do większości praktycznych zadań obliczeniowych, w tym także problemów NP-zupełnych. Na przykład dla

problemu komiwojażera Σ jest zbiorem etykiet wierzchołków analizowanego grafu, a R jest zbiorem wszystkich permutacji elementów zbioru Σ . W przypadku dyskretnego problemu plecakowego Σ jest zbiorem obiektów danego typu, podczas gdy R jest zbiorem słów-rozwiązań (reprezentujących sposób zapakowania plecaka) dowolnej długości z dokładnością do kombinacji z powtórzeniami i ograniczeń na licznosc obiektów danego typu.

3 Dyskretny algorytm mrówkowy

Dyskretny algorytm mrówkowy (w skrócie DAS) jest rozwinięciem **systemu mrówkowego** (ang. Ant System) wprowadzonego i modyfikowanego przez M. Dorigo w [1,2,5] początkowo na potrzeby głównie rozwiązywania instancji problemu komiwojażera [3,4]. Heurystyka zakłada kolektywną pracę i gromadzenie informacji przez jednostki (osobniki) nazywane **mrówkami** oraz konstruowanie indywidualnych rozwiązań w oparciu o globalną wiedzę zbioru indeksowanych mrówek $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, zwanego dalej **mrowiskiem**. Algorytm DAS jest metodą iteracyjną, polegającą na sekwencyjnym powtarzaniu trzech głównych reguł ewolucji:

NCR – reguła wyboru sąsiedztwa (ang. Neighbor Choosing Rule),

SCR – reguła konstrukcji rozwiązania (ang. Solution Construction Rule),

PUR – reguła aktualizacji śladu feromonowego (ang. Pheromone Update Rule).

Ogólny schemat algorytmu ma następującą postać:

while (warunek stopu nie jest spełniony) **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**

 mrówka a_i buduje słowo-rozwiązanie zgodnie z regułą SCR (korzystając z reguły NCR);

 mrówka a_i aktualizuje ślad feromonowy zgodnie z regułą PUR;

Metoda bazuje na pojęciu *współczynnika nasycenia śladu feromonowego* $\tau \in N_+$, który jest nośnikiem wspomnianej globalnej wiedzy zbioru mrówek o specyfice przeszukiwanej przestrzeni rozwiązań. Wartość współczynnika τ charakteryzuje jakość rozwiązania (mierzoną wartością funkcji oceny), jakie buduje mrówka korzystając z symboli ze zbioru Σ w określonej kolejności.

Niech dalej τ_{\max} będzie maksymalną wartością współczynnika nasycenia śladu feromonowego oraz $H = \{1, 2, \dots, \tau_{\max}\}$ będzie zbiorem możliwych wartości współczynnika nasycenia śladu feromonowego.

Wprowadzamy kolejno dwa zbiory stanów **struktur feromonowych** realizujących proces wymiany informacji między mrówkami:

$\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_f\}$ – skończony zbiór f indeksowanych wektorów kolumnowych stopni nasycenia śladu feromonowego wymiaru n takich, że $F_i \in \mathbf{H}^n$, dla $i = 1, 2, \dots, f$, oraz $F[j]$ oznacza ilość feromonu związanego z użyciem symbolu $x_j \in \Sigma$ w konstruowanym słowie-rozwiązaniu ω ,

$\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_h\}$ – skończony zbiór h indeksowanych macierzy stopni nasycenia śladu feromonowego wymiaru $n \times n$ takich, że $H_i \in \mathbf{H}^{n \times n}$, dla $i = 1, 2, \dots, h$, oraz $H[j, k]$ oznacza ilość feromonu związanego z użyciem symbolu x_k tuż po symbolu x_j w konstruowanym słowie-rozwiązaniu ω .

Korzystając z wprowadzonych zbiorów stanów struktur feromonowych przedstawimy kolejno zasadę działania trzech wspomnianych reguł tworzących dyskretny algorytm mrówkowy, tj. reguły NCR, SCR oraz PUR. Pierwsza z nich, reguła wyboru sąsiedztwa, realizuje probabilistykę kolejności wyboru symboli w trakcie konstrukcji słowa-rozwiązania przez pojedynczą mrówkę. Dalej

$$NCR: \mathbf{F} \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma$$

jest funkcją **niedeterministyczną** dla argumentów odpowiednio wektora kolumnowego stopni nasycenia śladu feromonowego $F \in \mathbf{F}$ i aktualnie skonstruowanego słowa $\omega \in \Sigma^*$ taką, że $NCR(F, \omega) = x_i$ z prawdopodobieństwem równym

$$\begin{cases} \frac{F[i]}{\sum_{(j: \Delta(\omega x_j)=1)} F[j]}, & \text{gdy } \Delta(\omega x_i) = 1 \\ 0, & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Na tej podstawie możemy podać następujący wniosek

Wniosek 3.1. Dla dowolnego wektora kolumnowego $F \in \mathbf{F}$, dowolnego słowa $\omega \in \Sigma^*$ oraz dowolnego symbolu $\omega \in \Sigma$ zachodzi

$$Pr(NCR(F, \omega) = x) \in (0, 1)$$

jeżeli $\Delta(\omega x) = 1$, oraz

$$Pr(NCR(F, \omega) = x) = 0$$

w p.p.

Omówiona reguła wyboru sąsiedztwa NCR stanowi podstawę kolejnego, w konsekwencji także **niedeterministycznego** mechanizmu ewolucji, czyli reguły konstrukcji rozwiązania SCR, gdzie

$$SCR: \mathbf{F} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Niech dalej $F \in \mathbf{F}$ oraz $H \in \mathbf{H}$ oznaczają odpowiednio wektor stopni nasycenia śladu feromonowego odpowiadający za wybór **symbolu początkowego** oraz macierz stopni nasycenia śladu feromonowego determinująca **wybór kolejnych symboli** w konstruowanym słowie-rozwiązaniu $\omega \in \mathbf{R}$. Wektor \mathbf{F} oraz macierz \mathbf{H} są wspólne dla całej populacji mrówek i stanowią wspomniany wcześniej nośnik globalnej informacji heurystycznej dotyczącej eksploracji przestrzeni rozwiązań. Reguła SCR jest złożeniem ciągu zdarzeń niezależnych, generowanych przez wielokrotne zastosowanie wprowadzonego powyżej mechanizmu NCR. Kolejno na podstawie wektora \mathbf{F} mrówka wyznacza pierwszy element słowa-rozwiązania ω

$$\omega \leftarrow NCR(F, \varepsilon).$$

Dopóki nie jest prawdziwy **wewnętrzny warunek stopu** (warunek ten jest zadany i ma charakter indywidualny dla każdego zadania optymalizacyjnego, np. dla problemu komiwojażera jest to weryfikacja, czy słowo ω jest permutacją zbioru elementów Σ) mrówka powtarza następującą czynność: niech $\omega = x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_i}$, na podstawie l_i -tego wektora kolumnowego macierzy \mathbf{H} oznaczonego przez $\mathbf{H}[l_i, \cdot]$ wyznaczamy kolejny element rozwiązania

$$x_{l_{i+1}} \leftarrow NCR(H[l_i, \cdot], \omega)$$

z prawdopodobieństwem określonym własnościami reguły NCR, a następnie dodajemy wyznaczony symbol $x_{l_{i+1}}$ na koniec słowa ω , tj.

$$\omega \leftarrow \omega x_{l_{i+1}}.$$

Stąd wyprowadzamy poniższy wniosek traktujący o probabilistyce reguły SCR

Wniosek 3.2. Dla dowolnego wektora kolumnowego $F \in \mathbf{F}$, dowolnej macierzy $H \in \mathbf{H}$ oraz dowolnego słowa-rozwiązania $\omega \in \mathbf{R}$ postaci

$$\omega = x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_r}$$

zachodzi

$$Pr(SCR(F, H) = \omega) = Pr(NCR(F, \varepsilon) = x_{l_1})$$

$$\prod_{i=1}^{r-1} \Pr(NCR(H[l_i, \cdot], x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_i}) = x_{l_{i+1}})$$

zatem na podstawie wniosku 3.1.

$$\Pr(SCR(F, H) = \omega) \in (0, 1]$$

Wniosek 3.2 ma istotne implikacje probabilistyczne. Zgodnie z jego treścią dowolne słowo-rozwiązanie $\omega \in \mathbf{R}$, a zatem także słowo-rozwiązanie optymalne należące do zbioru rozwiązań optymalnych $\mathbf{R}^* \subseteq \mathbf{R}$ może, z dodatnim prawdopodobieństwem, być rezultatem zastosowania reguły SCR w dowolnym stanie struktur feromonowych \mathbf{F} oraz \mathbf{H} .

Przedstawione do tej pory mechanizmy NCR, oraz SAR mają charakter **statyczny** ze względu na wymianę informacji wewnątrz mrowiska, a ich działanie zależy jedynie od aktualnego stanu informacji heurystycznej, zapisanej w wektorze \mathbf{F} oraz macierzy \mathbf{H} . Ostatnia reguła PUR, aktualizacji śladu feromonowego, ma charakter **dynamiczny**. Odnosi się do wcześniejszego kierunku ewolucji mrówki i modyfikuje zawartość wspomnianych powyżej struktur feromonowych \mathbf{H} i \mathbf{F} .

Mechanizm PUR można podzielić na dwa kluczowe etapy: kolejno aktualizację elementów wektora \mathbf{F} oraz aktualizację elementów macierzy \mathbf{H} . W obu przypadkach zastosowanie mechanizmu wymaga znajomości dwóch słów-rozwiązań odpowiednio ω^{-1} , słowo zbudowane przez mrówkę w iteracji bezpośrednio poprzedzającej aktualnie rozważaną, oraz ω , słowo zbudowane przez mrówkę w aktualnej iteracji. Zestawienie wartości funkcji oceny dla tych dwóch elementów ma charakter **lokalny (krótkoterminowy)**. Na potrzeby artykułu przyjmujemy, że badanie zależności tych dwóch wartości jest w pełni wystarczające. Należy jednak podkreślić, że w praktyce rozważamy zwykle dodatkowo relację wartości funkcji jakości dla słowa-rozwiązania aktualnie skonstruowanego, jak i do tej pory najlepszego. Tym samym analizujemy także **globalną (długoterminową)** własność ewolucji wartości funkcji oceny. Takie zestawienie krótko i długoterminowe daje pełniejszy obraz zachowania mrówki, a zatem pozwala na dokładniejszą i bardziej przemyślaną modyfikację struktur feromonowych wewnątrz reguły PUR.

Działanie **deterministycznego** mechanizmu aktualizacji śladu feromonowego wymaga zdefiniowania pomocniczych operatorów inkrementacji i dekrementacji elementów zbioru \mathbf{F} , odpowiednio

$$\text{inc}_{\mathbf{F}} : \mathbf{F} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{F} \text{ oraz } \text{dec}_{\mathbf{F}} : \mathbf{F} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{F},$$

a także operatorów inkrementacji i dekrementacji elementów zbioru \mathbf{H} , odpowiednio

$$\text{inc}_{\mathbf{F}} : \mathbf{H} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{H} \text{ oraz } \text{dec}_{\mathbf{F}} : \mathbf{H} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{H}.$$

Niech dalej $\omega = x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_r}$ będzie słowem-rozwiązaniem. Rezultatem działania operatora $\text{inc}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \omega)$ bądź $\text{dec}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \omega)$ jest wektor powstały z wektora \mathbf{F} przez wykonanie operacji stosownie inkrementacji

$$F[l_1] \leftarrow \min(\tau_{\max}, F[l_1] + 1)$$

albo

$$F[l_1] \leftarrow \max(1, F[l_1] - 1)$$

na elemencie wektora o indeksie l_i , gdzie l_i jest indeksem pierwszego elementu rozwiązania ω . W przypadku zastosowania operatora $\text{inc}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}, \omega)$ bądź $\text{dec}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}, \omega)$ wynikiem jest macierz wyprowadzona z macierzy \mathbf{H} zgodnie z poniższym

$$H[l_i, l_{i+1}] \leftarrow \min(\tau_{\max}, H[l_i, l_{i+1}] + 1)$$

oraz

$$H[l_i, l_{i+1}] \leftarrow \max(1, H[l_i, l_{i+1}] - 1),$$

dla wszystkich elementów macierzy $H[l_i, l_{i+1}]$, gdzie $i = 1, 2, \dots, r$ jest indeksem następujących po sobie symboli rozwiązania ω .

Korzystając z przedstawionych pomocniczych operatorów inkrementacji i dekrementacji struktur feromonowych \mathbf{F} i \mathbf{H} możemy finalnie zapisać schemat reguły aktualizacji śladu feromonowego

$$\text{PUR}(F, H, \omega, \omega^{-1})$$

if ($\omega \leq \omega^{-1}$) **then**

$$F \leftarrow \text{inc}_{\mathbf{F}}(F, \omega); F \leftarrow \text{dec}_{\mathbf{F}}(F, \omega^{-1});$$

$$H \leftarrow \text{inc}_{\mathbf{H}}(H, \omega); H \leftarrow \text{dec}_{\mathbf{H}}(H, \omega^{-1});$$

else

$$F \leftarrow \text{inc}_{\mathbf{F}}(F, \omega^{-1}); F \leftarrow \text{dec}_{\mathbf{F}}(F, \omega);$$

$$H \leftarrow \text{inc}_{\mathbf{H}}(H, \omega^{-1}); H \leftarrow \text{dec}_{\mathbf{H}}(H, \omega);$$

Rozważania zawarte w tym rozdziale zakończymy sformułowaniem wniosku dotyczącego probabilistyki zmiany wartości elementów struktur feromonowych \mathbf{F} i \mathbf{H} . Odwołując się bezpośrednio do podanej wcześniej

konstrukcji algorytmu DAS oraz charakterystyki reguły SCR zapisanej we wniosku 3.2 dostajemy

Wniosek 3.3. Niech $F, F' \in F$ oraz $H, H' \in H$ będą strukturami feromonowymi takimi, że wektor F' i macierz H' są osiągalne z odpowiednio wektora F i macierzy H przez iterowanie reguły PUR, wtedy prawdopodobieństwo przejścia ze stanu struktur feromonowych (F, H) do stanu (F', H') jest dodatnie.

4 Model teoretyczny algorytmu DAS

Dla uproszczenia prezentowanych w tym rozdziale wyników omówimy model teoretyczny algorytmu DAS dla procesu ewolucji pojedynczej mrówki. Rozszerzenie dalszych rezultatów dla przypadku mrowiska składającego się z $m > 1$ mrówek jest, ze względu na ich sekwencyjną pracę w wewnętrznej pętli iteracyjnej (for $i \leftarrow 1$ to m do), zadaniem czysto technicznym.

Przez stan mrówki $s_{(t)}$ w chwili t będziemy rozumieli czwórkę

$$F_{(t)}, H_{(t)}, \omega_{(t)}, \omega_{(t)}^*$$

gdzie:

- ♦ $F_{(t)}$ – jest wektorem stopni nasycenia śladu feromonowego określającym probabilistykę wyboru symbolu początkowego dla słowa-rozwiązania konstruowanego w trakcie przejścia mrówki ze stanu $s_{(t)}$ do stanu $s_{(t+1)}$,
- ♦ $H_{(t)}$ – jest macierzą stopni nasycenia śladu feromonowego określającą probabilistykę wyboru kolejnych symboli dla słowa-rozwiązania konstruowanego w trakcie przejścia mrówki ze stanu $s_{(t)}$ do stanu $s_{(t+1)}$,
- ♦ $\omega_{(t)}$ – słowo-rozwiązanie skonstruowane w chwili t ,
- ♦ $\omega_{(t)}^*$ – najlepsze, względem wartości funkcji oceny, słowo-rozwiązanie skonstruowane do chwili t włącznie.

Bezpośrednio z podanego w poprzednim rozdziale schematu działania dyskretnego algorytmu mrówkowego (sekwencyjne złożenie reguł SCR oraz PUR w pojedynczej iteracji względem stanów struktur feromonowych będących rezultatem wykonania poprzedniej iteracji) jak i wprowadzonej definicji stanu mrówki, możemy podać następujący wniosek

Wniosek 4.1. Stan mrówki w chwili $t + 1$ zależy jedynie od stanu mrówki w chwili t .

Następnie $S = \{s_1, s_2, \dots, s_s\}$ jest zbiorem wszystkich s indeksowanych stanów mrówki, stąd

$$S = F \times H \times R^2$$

co prowadzi do kolejnego wniosku

Wniosek 4.2. *Zbiór stanów mrówki S jest zbiorem skończonym.*

Korzystając z pojęcia stanu pojedynczej mrówki, przejdziemy teraz do omówienia sposobu algebraicznego modelowania procesu ewolucji algorytmu DAS. Jak wspomnieliśmy we wstępie, prezentowane w artykule wyniki bazują na podejściu probabilistycznym, zastosowanym w [9,13] do analizy zbieżności prostego algorytmu genetycznego w oparciu o rezultaty z dziedziny stochastycznych układów dynamicznych (zob. [8,12]). Dalej $\hat{U}_{(t)} \in [0,1]^s$ będzie stochastycznym wektorem kolumnowym wymiaru s reprezentującym rozkład prawdopodobieństwa stanu mrówki w chwili t , gdzie $\hat{U}_{(t)} \in [i]$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili t mrówka znajduje się w stanie $s_i \in S$. Następnie definiujemy kolumnowo stochastyczną macierz $\hat{T} \in [0,1]^{s \times s}$ przejścia mrówki między stanami tak, że $\hat{T} \in [i, j]$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia mrówki z stanu s_i do stanu s_j . Zatem, pojedyncza iteracja rozważanej metody heurystycznej sprowadza się do wykonania przekształcenia algebraicznego postaci

$$\hat{U}_{(t+1)} = \hat{U}_{(t)} \hat{T}.$$

Ogólnie, jeżeli $\hat{U}_{(0)}$ jest wektorem rozkładu prawdopodobieństwa dla stanu początkowego pojedynczej mrówki, to

$$\hat{U}_{(t)} = \hat{U}_{(0)} \hat{T}^t$$

jest wektorem prawdopodobieństwa dla stanów mrówki w chwili t , gdzie $t=1,2,3,\dots$

Uwzględnienie w tym miejscu wniosków 4.1 i 4.2 pozwala nam na wyrażenie procesu ewolucji dyskretnego algorytmu mrówkowego w języku teorii łańcuchów Markowa nad skończoną przestrzenią stanów mrówki S . Prowadzi to do kluczowego z punktu widzenia wyników zawartych w artykule stwierdzenia

Wniosek 4.3. Proces ewolucji pojedynczej mrówki w przyjętym modelu teoretycznym algorytmu DAS jest procesem Markowa.

Znaczenie wniosku 4.3 można rozbudować o istotne aplikacje praktyczne, przez wskazanie procedury uzupełniania elementów macierzy przejścia \hat{T} dla konkretnej instancji problemu optymalizacyjnego. Powstaje zatem pytanie, czy dla zadanej piątki $(\Sigma, \mathfrak{R}, \Delta, \|\cdot\|, \lfloor \cdot \rfloor)$

potrafimy wyznaczyć wartość dowolnego elementu $\hat{T}[i, j]$ rozważanej macierzy. Odpowiedź jest **pozytywna**, wystarczy sięgnąć do przedstawionego wcześniej schematu algorytmu DAS, własności reguł ewolucji jak i definicji stanu mrówki. Szczegółowe informacje na ten temat czytelnik może znaleźć w [10, 11].

Powyższe rozważania mają interesujący charakter jakościowy. Wykazują, że jeżeli znany jest nam wektor $\hat{U}_{(0)}$ rozkładu prawdopodobieństwa stanu mrówki w chwili początkowej dla zadanego problemu optymalizacyjnego, rozwiązywanego przy użyciu metody DAS, i zbudowaliśmy kompletną postać macierzy przejścia \hat{T} , to wyznaczenie t -tej potęgi wspomnianej macierzy i prawostronne przyłożenie otrzymanego rezultatu do wektora $\hat{U}_{(0)}$ pozwoli nam określić w sposób dokładny rozkład prawdopodobieństwa wektora stanu w chwili $t > 1$. Tym samym możemy czynić probabilistyczne próby przewidywania kierunku ewolucji dyskretnego algorytmu mrówkowego. Korzystając z tych rezultatów w następnym rozdziale sformułujemy twierdzenie o punktowej zbieżności rozważanego narzędzia optymalizacyjnego.

5 Zbieżność punktowa algorytmu DAS

Przypomnijmy teraz, że $\hat{U}_{(t)} \in [0,1]^s$ jest stochastycznym wektorem kolumnowym determinującym rozkład prawdopodobieństwa stanu mrówki w chwili t , a $\hat{T} \in [0,1]^{s \times s}$ jest macierzą przejścia między stanami. Przez **zbieżność punktową algorytmu heurystycznego** we wprowadzonym modelu probabilistycznym będziemy rozumieli istnienie **dokładnie jednego** wektora $\hat{U} \in [0,1]^s$ takiego, że

$$\forall \hat{U}_{(0)} \in [0,1]^s : \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}^t \hat{U}_{(0)} = \hat{U}$$

gdzie $\hat{U}[i]=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy s_i jest wyróżnionym (poszukiwanym) stanem, oraz $\hat{U}[i]=0$ w pozostałych przypadkach, dla $i=1,2,\dots,s$. Dalej kolejno wektor \hat{U} oraz stan s_i będziemy nazywali odpowiednio *punktem zbieżności* oraz *stanem zbieżności*.

Wprowadzona definicja zbieżności punktowej algorytmu heurystycznego nakłada silne kryterium na kierunek procesu ewolucji obliczeń pojedynczej mrówki. Zgodnie z jej brzmieniem niezależnie od przyjętego stanu początkowego, odpowiednio długie iterowanie schematu metody DAS winno zawsze prowadzić do tego samego, ustalonego stanu końcowego s z określonymi postaciami struktur feromonowych \mathbf{F} i \mathbf{H} oraz rozwiązaniami ω i ω^* . Z praktycznego punktu widzenia taki warunek jest zbyt rygorystyczny. Wracając do definicji problemu optymalizacyjnego, którą przyjęliśmy w rozdziale drugim, wszystkie stany $s \in S$, dla $s = (F, H, \omega, \omega^*)$, gdzie $\omega^* \in \mathbf{R}^*$ jest dowolnym z rozwiązań optymalnych, są **nierozróżnialne** względem celu działania algorytmu optymalizacyjnego (interesuje nas konstrukcja pewnego rozwiązania optymalnego, a nie grupy wszystkich rozwiązań optymalnych).

Na podstawie powyższego spostrzeżenia wszystkie stany s przestrzeni stanów S , w których element ω^* , tj. rozwiązanie dotychczas najlepsze, jest w rzeczywistości jednym z rozwiązań optymalnych, zgrupujemy teraz w jeden *super-stan* s^* taki, że

$$s^* = \{(F, H, \omega, \omega^*) \in S : \omega^* \in \mathbf{R}^*\}$$

oraz

$$S^* = (S \setminus s^*) \cup \{s^*\}$$

będzie zbiorem indeksowanych stanów pojedynczej mrówki z super-stanem s^* . Redukcja oryginalnej przestrzeni stanów S do przestrzeni S^* podtrzymuje wszystkie wyprowadzone wcześniej własności i wyniki teoretyczne w rozważanym modelu probabilistycznym. Dodatkowo pozwala nam na sformułowanie **głównego teoretycznego rezultatu badawczego** niniejszego artykułu w postaci twierdzenia o zbieżności punktowej dyskretnego algorytmu mrówkowego

Twierdzenie. *Dyskretny algorytm mrówkowy jest punktowo zbieżny względem stanu zbieżności s^* .*

Czytelników zainteresowanych formalnym uzasadnieniem poprawności powyższego twierdzenia odsyłamy do innej pracy autora zaprezentowanej w [11].

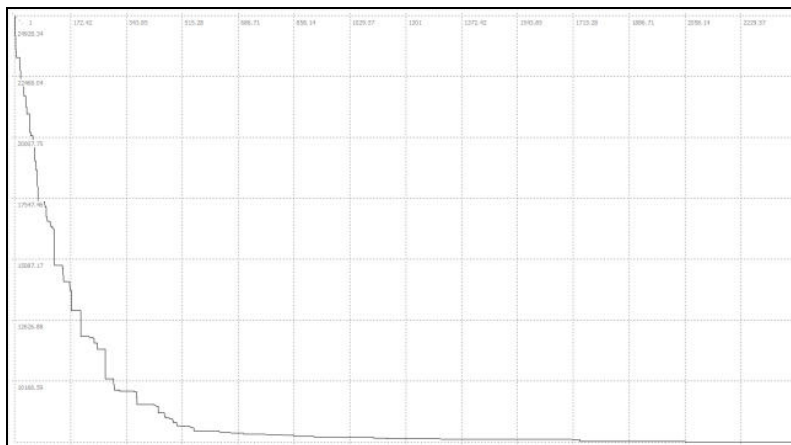
6 Wyniki praktyczne

Praktyczną efektywność obliczeniową rozważanej heurystyki zbadamy eksperymentalnie dla instancji klasycznego problemu komiwojażera Berlin52 z biblioteki TSPLIB (<http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/>). Zbiór danych wejściowych dla przedstawionego problemu składa się z 52 punktów rozmieszczonych na płaszczyźnie euklidesowej. Optymalne rozwiązanie to cykl Hamiltona o łącznej długości krawędzi składowych równej 7542 jednostki.

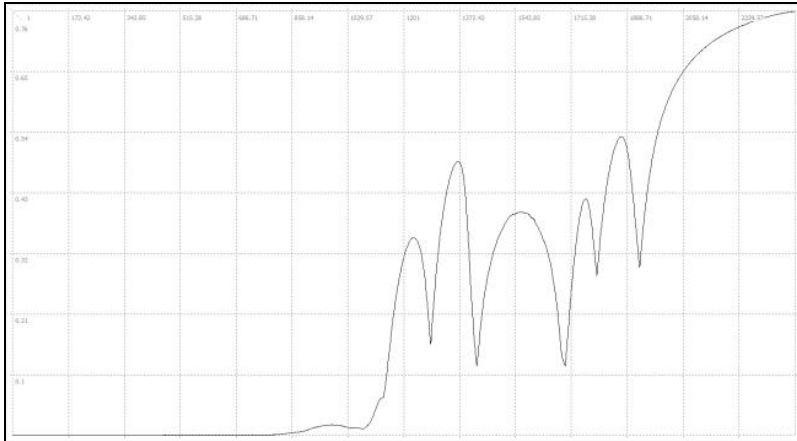
W eksperymencie przyjmujemy następujące wartości parametry wykonania algorytmu DAS:

- ♦ licznosc populacji: 1040 mrówek,
- ♦ wartość współczynnika τ_{\max} : 364 (dobrana tak, by prawdopodobieństwo skonstruowania dowolnego rozwiązania przez mrówkę w dowolnej iteracji algorytmu było nie większe niż 0,99).

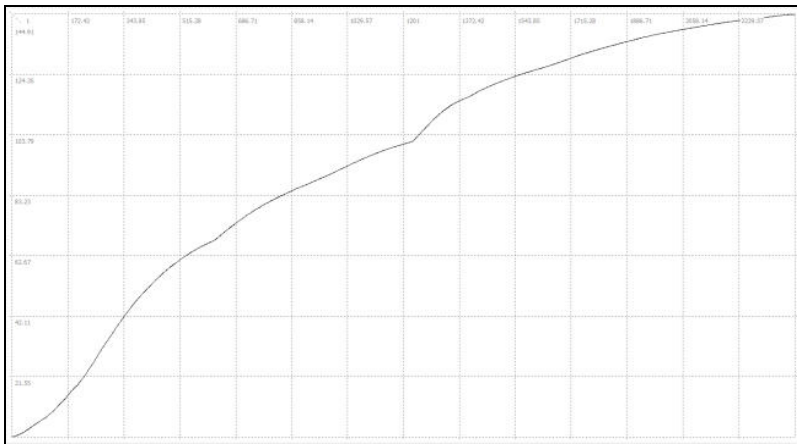
Poniższe wykresy prezentują monitoring kluczowych parametrów procesu ewolucji heurystyki DAS dla ustalonej wyżej instancji klasycznego problemu komiwojażera.



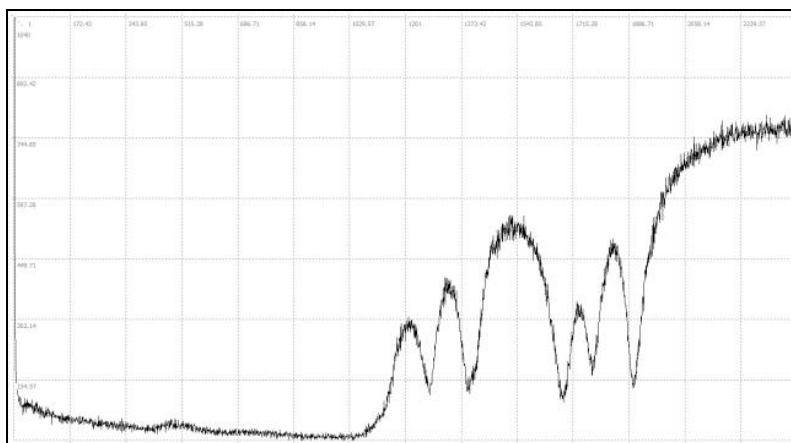
Rys. 1. Wykres zmiany w czasie wartości najlepszego rozwiązania (wartość początkowa 24928 dla $t=0$, wartość końcowa 7706 dla $t=2400$).



Rys. 2. Wykres zmiany w czasie średniej dla wszystkich mrówek wartości prawdopodobieństwa ponownej konstrukcji dotychczas najlepszego rozwiązania (wartość początkowa 0,00 dla $t=0$, wartość końcowa 0,76 dla $t=2400$).



Rys. 3. Wykres zmiany w czasie wartości maksymalnej współczynnika nasycenia śladu feromonowego zapisanego w macierzy H (wartość początkowa 1 dla $t=0$, wartość końcowa 145 dla $t=2400$).



Rys. 4. Wykres zmiany liczby mrówek w czasie, które w aktualnej iteracji algorytmu DAS skonstruowały rozwiązanie, którego wartość jest nie mniejsza niż wartość rozwiązania dotychczas najlepszego (wartość początkowa 1040 dla $t=0$, wartość końcowa 775 dla $t=2400$).

Rezultatem eksperymentu obliczeniowego jest konstrukcja w 2085 iteracji rozwiązania, którego łączny koszt mierzony sumą długości krawędzi składowych jest równy 7706 (błąd względny w odniesieniu do rozwiązania optymalnego 2,17%).

W ujęciu ogólnym i z uwzględnieniem skalowalności rozwiązania eksperymentalna efektywność algorytmu DAS została zweryfikowana dla zbioru instancji problemów zawartych w bibliotece TSPLIB zawierającego kolejno: 76, 100, 150, 200, 318 oraz 439 punktów rozmieszczonych na płaszczyźnie euklidesowej. Średni błąd względny otrzymanych rozwiązań w odniesieniu do rozwiązań optymalnych to 5,45%.

7 Podsumowanie

Przedstawiony w rozdziale V wynik dotyczący punktowej zbieżności metody heurystycznej DAS stanowi konieczny punkt bazowy dla dalszych prac związanych z analizą teoretyczną własności asymptotycznych rozważanego algorytmu. Dyskretny algorytm mrówkowy spełnia własność zbieżności, której nie posiadają inne popularne metody heurystyczne, np. prosty algorytm mrówkowy [9,13]. Wstępne rezultaty eksperymentów obliczeniowych zaprezentowane w rozdziale VI wskazują na istotny potencjał algorytmu DAS w przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań dla zdefiniowanej klasy problemów optymalizacyjnych.

Równolegle do wyżej wymienionych prac teoretycznych autor prowadzi także badania mające na celu kolejno wprowadzenie mechanizmu samoadaptacji zachowania pojedynczej mrówki, oraz efektywną implementację algorytmu DAS w silnie współbieżnym środowisku obliczeniowym

Artykuł powstał w ramach badań wspieranych projektem MNiSzW Nr N N519 5788038.

8 Literatura

- [1] Dorigo M., *Optimization, learning and natural algorithms*, Ph. D. dissertation, 1992.
- [2] Dorigo M., Birattari M. Stutzle T., *Ant Colony Optimization*, IEEE Computational Intelligence Magazine, XI 2006.
- [3] Dorigo M., Gambardella L. M., *Ant Colony System: A cooperative learning approach to the TSP problem*, IEEE Transaction on Evolutionary Computation, vol. 1, 1997.
- [4] Dorigo M, Gambardella L. M., *Solving symmetric and asymmetric TSPs by ant colonies*, IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 1996.
- [5] Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A., *Ant System: optimization by colony of cooperating agents*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 26, 1996.
- [6] Dorigo M., Stutzle T., *A short convergence proof for a class of ACO algorithms*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol 6, 2002.
- [7] Gutjahr W. J., *ACO algorithms with guaranteed convergence proof to the optimal solution*, Information Processing Letters, vol 82, 2002.
- [8] Lasota A., *Asymptotyczne własności półgrup operatorów Markowa*, Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa, 3 (45), 2002, 39-51.
- [9] Kosiński W., Kotowski S., *Limit Properties of Evolutionary Algorithms*, Chapter 1 in: *Advances in Evolutionary Algorithms*, W. Kosiński (Ed.), IN-TECH 2008, pp. 1-28, ISBN 978-953-7619-11-4.
- [10] Rembelski P., *Model teoretyczny algorytmu mrówkowego SAS*, Proceedings of the XII International Ph.D. Workshop, OWD 2010 (strony 37-42).
- [11] Rembelski P. *Markowowski model dyskretnego algorytmu mrówkowego*, Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa, PTM, Warszawa, 13 (54), 2011.

- [12] Rudnicki R., *On asymptotic stability and sweeping for Markov operators*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 43 (1995), 245-262.
- [13] Socała J., Kosiński W., Kotowski S., *O asymptotycznym zachowaniu prostego algorytmu genetycznego*, Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa, PTM, Warszawa, 6 (47), 2005, 70-86.

POINTWISE CONVERGENCE OF DISCRETE ANT SYSTEM ALGORITHM WITH PRACTICAL RESULTS

Summary - Discrete Ant System (DAS) algorithm, a modification of classical Ant System algorithm formulated by M. Dorigo, is presented. Definition of optimization problem and a detailed description of component rules of DAS method are given. Then a probabilistic algebraic model of DAS heuristic describing its evolution in terms of Markov chains is presented. The final outcome about a pointwise convergence of Discrete Ant System algorithm is established. In addition, preliminary practical results are introduced on the effectiveness of the DAS algorithm applied to the selected NP-complete problem.