

**Jacek Wiśniewski**  
Katedra Mechaniki i Informatyki Technicznej  
Politechnika Łódzka

## **OPTYMALIZACJA KOSZTÓW MATERIAŁOWYCH W PROJEKTOWANIU STRUKTUR KOMPOZYTOWYCH**

Streszczenie – W pracy przedstawiono wyniki badań nad problemem minimalizacji kosztów materiałowych w projektowaniu struktur kompozytowych obciążonych mechanicznie. Rozpatrzono płaskie, dwuwymiarowe i liniowo-sprężyste elementy konstrukcyjne wykonane z materiału matrycy wzmocnionej długimi i prostoliniowymi włóknami. Sformułowano zadanie projektowania takich struktur oraz zaprezentowano metodę optymalizacyjną do rozwiązywania takich zadań opartą o algorytm ewolucyjny rozszerzony o metodę elementów skończonych do analizy pracy konstrukcji kompozytowej. Wyniki badań zilustrowano prostym przykładem numerycznym.

### **1 Wprowadzenie**

Dynamiczny rozwój nowych technologii powoduje, że współczesny inżynier-konstruktor dostaje do dyspozycji nowe materiały o własnościach znacznie odbiegających od własności tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych. Do grupy takich materiałów należą między innymi kompozyty włókniste zbudowane z lekkiej matrycy wzmocnionej długimi włóknami. Taka budowa sprawia, że kompozyty włókniste charakteryzują się bardzo dobrymi własnościami mechanicznymi i wytrzymałościowymi przy niskiej masie. Dlatego też materiały te są coraz częściej stosowane w różnego rodzaju konstrukcjach dla pracy których własności te mają ogromne znaczenie.

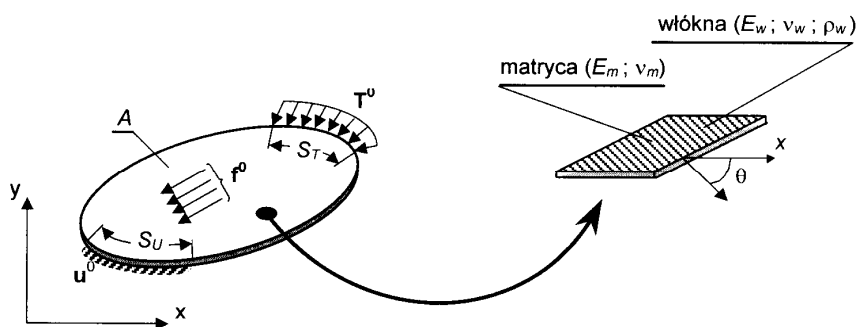
Proces projektowania takich struktur jest procesem złożonym w którym trudno bazować wyłącznie na doświadczeniu i intuicji konstruktora. Proces ten musi być rozszerzony o matematyczne metody optymalizacyjne w wyniku czego staje się synonimem zadania optymalizacji polegającego na znalezieniu najlepszego zestawu parametrów strukturalnych kompozytu, takich jak: własności mechaniczne matrycy i włókien, udział objętościowy i orientacja wzmocnienia itp., tak aby funkcjonował opisujący w sposób matematyczny

lokalne lub globalne własności konstrukcji wykonanej z tego materiału osiągał wartość ekstremalną przy jednoczesnym spełnieniu pewnej liczby nałożonych wymagań zwanych ograniczeniami.

Niniejszy artykuł przedstawia wyniki badań numerycznych nad minimalizacją kosztów materiałowych w projektowaniu struktur kompozytowych i stanowi kontynuację wcześniejszych prac [1,4] w zakresie analizy i optymalnego projektowania kompozytów włóknistych.

## 2 Sformułowanie problemu

Obiektem badań są płaskie, dwu-wymiarowe i liniowo-sprężyste elementy konstrukcyjne obciążone statycznie siłami masowymi  $\mathbf{f}^0$  w obszarze  $A$  i obciążeniem  $\mathbf{T}^0$  na brzegu  $S_T$ , działającymi w ich płaszczyźnie, oraz podparte na brzegu  $S_U$  (rys.1). Elementy te wykonane są materiału kompozytowego będącego mieszaniną matrycy i rodziny długich, prostoliniowych włókien o wyższych niż matryca własnościach mechanicznych. Matryca i włókna wzmacniające są materiałami jednorodnymi, izotropowymi i liniowo-sprężystymi o module Younga i współczynniku Poissona wynoszącymi odpowiednio  $E_m, \nu_m$  oraz  $E_w, \nu_w$ . Ponadto, włókna są równomiernie i jednokierunkowo rozłożone w matrycy pod kątem  $\theta$  w odniesieniu do osi  $x$  globalnego układu współrzędnych, a ich udział objętościowy w kompozycie wynosi  $\rho_w$ .



Rys. 1. Kompozytowy element konstrukcyjny poddany obciążeniu i warunkom brzegowym

W zastosowaniach praktycznych proces projektowania elementów konstrukcyjnych sprowadza się bardzo często do poszukiwania minimalnych kosztów wykonania danej konstrukcji spełniającej stawiane

wymagania w zakresie określonych własności mechanicznych. W odniesieniu do rozpatrywanej w niniejszej pracy struktury kompozytowej, problem ten ogólnie można sformułować w postaci następującego zadania optymalizacyjnego:

*Minimalizacja całkowitego kosztu materiału kompozytu*

$$C(\mathbf{b}) = [c_w \rho_w + c_m (1 - \rho_w)] \cdot V \rightarrow \min. \quad (1)$$

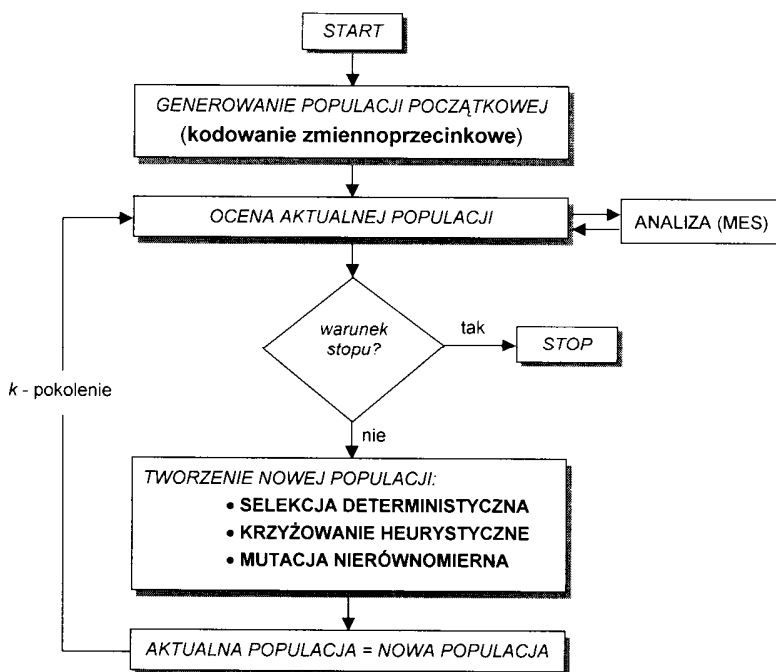
*przy spełnieniu globalnych lub lokalnych ograniczeń mechanicznych*

$$\left( \int_A \Gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{b}) dA + \int_{S_T} \Phi(\mathbf{T}^0, \mathbf{u}) dS_T \right) - G_0 \leq 0 \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  oznacza wektor zmiennych projektowych będących parametrami definiującymi strukturę materiału kompozytowego,  $c_w$  i  $c_m$  są kosztami odpowiednio włókien i matrycy, zaś  $\Gamma$  i  $\Phi$  ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami zależnymi od pól stanu powstałych w konstrukcji dla danego wektora zmiennych projektowych.

### 3 Ewolucyjna metoda optymalizacji

Do rozwiązania zadania minimalizacji kosztów materiałów w projektowaniu struktur kompozytowych została zaproponowana stochastyczna metoda optymalizacyjna oparta na algorytmie ewolucyjnym. Niewątpliwą zaletą tego algorytmu jest fakt, że w poszukiwaniu najlepszych rozwiązań wykorzystywane są tylko informacje uzyskiwane na podstawie wartości funkcji celu bez dodatkowej konieczności formułowania pewnych restrykcyjnych ograniczeń występujących przy stosowaniu tradycyjnych technik optymalizacyjnych. Poza tym metoda ta zawsze znajduje optimum globalne w przeciwieństwie do klasycznych metod, które często ewoluują w kierunku optimum lokalnych. Algorytm ewolucyjny poszukuje bowiem rozwiązania optymalnego wychodząc nie z pojedynczego punktu, lecz z pewnej populacji i eksploruje całą przestrzeń przeszukiwań. Warto też podkreślić, że metody ewolucyjne w żaden sposób nie wykorzystują wiedzy o rozwiązywanym problemie. To, że znajdują rozwiązanie wynika z faktu, że do następnego pokolenia przedostają się lepsze jednostki z pokolenia poprzedniego, a operatory ewolucyjne wymieniają informacje zawarte w tych jednostkach tworząc nowe, potencjalnie doskonalsze rozwiązania. To wszystko sprawia, że algorytmy ewolucyjne są obecnie coraz częściej stosowane w wielu dziedzinach, gdzie konieczne jest prowadzenie procesu optymalizacji, w tym także w projektowaniu konstrukcji.



Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu ewolucyjnego

Sieć działań algorytmu ewolucyjnego zaproponowanego do rozwiązania zadania (1-2) przedstawiono na rys.2, a dokładny opis jego poszczególnych etapów można znaleźć w pracach [3,4]. Ponieważ algorytm ten przeznaczony jest wyłącznie do rozwiązywania zadań programowania bez ograniczeń, w module została zastosowana zewnętrzna funkcja kary. W metodzie tej pierwotne zadanie (1-2) zastępowane jest ciągiem zadań zastępczych będących zadaniami minimalizacji bez ograniczeń postaci [3].:

$$\min_{\mathbf{b}} Z(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = \min_{\mathbf{b}} \left[ C(\mathbf{b}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_g} \alpha_i [\max.(0; G_i(\mathbf{b}))]^2 \right] \quad (3)$$

gdzie  $\boldsymbol{\alpha}$  jest wektorem dodatnich współczynników funkcji kary.

W etapie oceny populacji przeprowadzana jest analiza pracy konstrukcji kompozytowej, w której to analizie zostają wyznaczone pola stanu w konstrukcji z uwagi na wygenerowane w aktualnej populacji wartości zmiennych projektowych. Dla struktury przedstawionej na rys.1, jej zachowanie można opisać poprzez układ następujących równań [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^0 = 0 \\ \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^0 \quad \text{na } S_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{na } S_U \end{array} \right. \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest polem przemieszczeń,  $\mathbf{e}$  polem odkształceń, zaś  $\boldsymbol{\sigma}$  polem naprężeń powstałymi w obciążonej mechanicznie konstrukcji kompozytowej. Występująca w układzie (4) macierz  $\mathbf{D}$  jest macierzą sztywności tarczowej dla jednorodnego, ortotropowego modelu kompozytu w globalnym układzie współrzędnych x-y i może być wyrażona następującą zależnością [2]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-T} \quad (5)$$

Macierz  $\mathbf{C}$  jest tu macierzą sztywności kompozytu w układzie osi ortotropii wyznaczonym przez kierunek włókien i kierunek prostopadły do włókien. Macierz ta wyrażona jest w tzw. stałych inżynierskich kompozytu i ma postać:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie  $E_1$  i  $E_2$  są odpowiednio podłużnym i poprzecznym modułem Younga,  $\nu_{12}$  i  $\nu_{21}$  oznaczają większy i mniejszy współczynnik Poissona, zaś  $G_{12}$  jest modułem ścinania. Wykorzystując model kompozytu, przedstawiony w [2], stałe te wynoszą:

$$E_1 = E_w \rho_w + E_m (1 - \rho_w)$$

$$E_2 = \frac{E_w \left[ 1 + \left( \frac{E_w}{E_m} - 1 \right) \rho_w \right]}{\left[ \rho_w + \frac{E_w}{E_m} (1 - \rho_w) \right] \left[ 1 + \left( \frac{E_w}{E_m} - 1 \right) \rho_w \right] - \left( v_m \frac{E_w}{E_m} - v_w \right)^2 \rho_w (1 - \rho_w)} \quad (7)$$

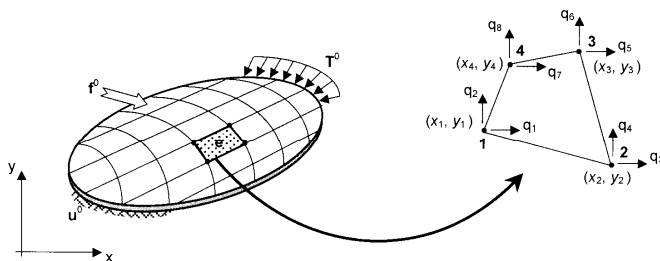
$$v_{12} = v_w \rho_w + v_m (1 - \rho_w) \quad \text{oraz} \quad v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1}$$

$$G_{12} = \frac{E_m \left[ \frac{E_w}{E_m} (1 + v_m) (1 + \rho_w) + (1 + v_w) (1 - \rho_w) \right]}{2(1 + v_m) \left[ \frac{E_w}{E_m} (1 + v_m) (1 - \rho_w) + (1 + v_w) (1 + \rho_w) \right]}$$

Macierz  $\mathbf{T}$ , występująca w zależności (5), jest macierzą transformacji związaną z obrotem układu odniesienia o kąt  $\theta$  zawarty między kierunkiem włókien, a osią  $x$  globalnego układu współrzędnych:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie zadania analizy jest przeprowadzane na drodze numerycznej w oparciu o metodę elementów skończonych (MES), której koncepcja polega na podziale rozważanego obszaru konstrukcji na zbiór, powiązanych ze sobą w węzłach, podobszarów o prostych kształtach geometrycznych [5].

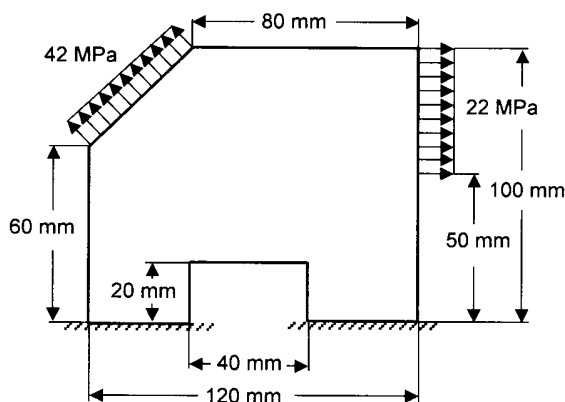


Rys. 3. Dyskretyzacja obszaru konstrukcji kompozytowej

W zaproponowanym algorytmie do dyskretyzacji obszaru kompozytowego elementu konstrukcyjnego wykorzystano czworokątne, czterowęzłowe elementy skończone z rodziny serendipowskiej (rys.3).

#### 4 Przykład numeryczny

W przykładzie rozpatrzono płaski, dwuwymiarowy element konstrukcyjny poddany obciążeniu i warunkom brzegowym jak pokazano na rys.4. Element ten wykonano z materiału kompozytowego składającego się z poliestrowej matrycy wzmocnionej rodziną długich i prostoliniowych włókien szklanych. Własności mechaniczne oraz cenę poszczególnych składników kompozytu zestawiono w Tabeli 1.



Rys. 4. Kompozytowy element konstrukcyjny poddany obciążeniu i warunkom brzegowym

Tabela. 1. Własności mechaniczne i koszt składników kompozytu

	$E$ [GPa]	$\nu$	cena [zł/kg]
włókna (szklane E)	75	0.25	15
matryca (poliester)	3.2	0.41	6

Rozpatrywany problem dotyczył takiego zaprojektowania struktury materiału kompozytowego z uwagi na udział objętościowy włókien  $\rho_w$  oraz ich kąt orientacji  $\theta$ , aby zminimalizować koszty materiałowe wykonania tej konstrukcji. Z uwagi na charakter pracy konstrukcji założono jednocześnie, że jej sztywność nie może przekraczać wartości 170.0 [J]. Dla tak sformułowanego problemu, ogólne kryterium optymalizacji (1-2) przyjmuje następującą postać:

Minimalizacja całkowitego kosztu materiału kompozytu

$$C(\rho_w, \theta) = [c_w \rho_w + c_m (1 - \rho_w)] \cdot V \rightarrow \min. \quad (9)$$

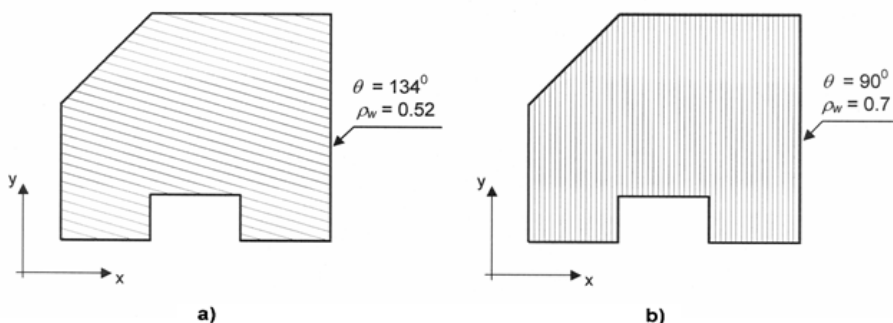
przy spełnieniu globalnego ograniczenia mechanicznego

$$\int_{S_T} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} dS_T - 170 \leq 0 \quad (10)$$

oraz ograniczeń geometrycznych

$$\begin{cases} 0 \leq \rho_w \leq 1 \\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \end{cases} \quad (11)$$

Do rozwiązania zadania (9-11) wykorzystano, przedstawiony w rozdziale 3, algorytm ewolucyjny, przy czym na etapie analizy zastosowano podział obszaru konstrukcji na 120 czworokątnych, czterowęzłowych elementów skończonych. Uzyskane wyniki optymalizacji ewolucyjnej zestawiono w Tabeli 2 oraz przedstawiono na rys.5a. W celu oceny jakości zaprojektowanej struktury, uzyskane rozwiązanie porównano ze strukturą identycznej konstrukcji wzmocnionej rodziną prostoliniowych włókien ułożonych równoległe do osi y globalnego układu współrzędnych (rys.5b).



Rys. 5. Kompozytowy element konstrukcyjny: a) po optymalizacji, b) porównawczy

Tabela. 2. Wyniki optymalizacji i porównawcze

	$\rho_w$	$\theta$	koszt	SZT
<i>konstrukcja optymalna</i>	0.52	134 <sup>0</sup>	1,24 zł	170,0 [J]
<i>konstrukcja porównawcza</i>	0.70	90 <sup>0</sup>	1,48 zł	170,0 [J]

Rezultaty przedstawione w Tabeli 2, pokazują, że w wyniku przeprowadzonej optymalizacji otrzymano strukturę kompozytową o



wymaganej sztywności, ale ponoszone koszty materiałowe przy jej wytwarzaniu obniżyły się o 17%. Warto też zwrócić uwagę, że uzyskane wyniki z przedstawionych w niniejszej pracy rozważań mogą stanowić punkt wyjścia do minimalizowania kosztów materiałowych w trakcie projektowaniu konkretnych konstrukcji kompozytowych pracujących pod zadaniem obciążeniem, pozwalając tym samym uniknąć kosztownych i pracochłonnych badań doświadczalnych, które można ograniczyć do końcowych badań eksperymentalnych gotowej konstrukcji.

## Literatura

- [1] Dems K., Wiśniewski J., Optimal design of fiber-reinforced composite disks, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* Vol.47, 2009.
- [2] German J., Wstęp do mechaniki materiałów kompozytowych, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1996.
- [3] Michalewicz Z., Algorytmy genetyczne + struktury danych = programowanie ewolucyjne, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1996.
- [4] Wiśniewski J., Dems K., Hybrid system for optimal design of mechanical properties of composites, *Computational Methods in Applied Sciences*, Vol.24, 2011.
- [5] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1972.

## OPTIMIZATION OF MATERIAL COSTS IN THE DESIGN OF COMPOSITE STRUCTURES

Summary – The results of investigation in the area of designing of the thin, two-dimensional and linearly elastic disk made of matrix reinforced with a family of long and unidirectional fibers are presented. The problem of the material cost minimization for this structure subjected to service loading is discussed. The optimization task for this type of design problem is derived. To solve of the task, the optimization procedure based on the evolutionary algorithm is proposed. The design problem is illustrated by simple numerical example.